Université d'Orléans
Département de Mathématiques

Préparation au CAPES
Année académique 2007–2008

Page web : http : //www.univ–orleans.fr/mapmo/membres/grellier/Enseignement/ ...
... /Capes/Capes2007.html

Réduction des endormorphismes et des matrices carrées (1ère partie)

Extrait du programme du concours (*BO n°* 8 *du 24 mai 2001*)

Le corps de base est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

• Sous–espaces stables par un endomorphisme. Si u et v commutent, $\operatorname{im} u$ et $\ker u$ sont stables par v. Polynômes d'un endomorphisme. Théorème de décomposition des noyaux : Si P et Q sont premiers entre eux, $\ker PQ(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$.

• Valeurs propres d'un endomorphisme, sous-espaces propres, vecteurs propres.

• Réduction d'un endomorphisme en dimension finie.
Polynôme annulant un endomorphisme ; lien avec le spectre.
Polynôme caractéristique ; ordre de multiplicité d'une valeur propre. Théorème de Cayley–Hamilton.
Endomorphismes diagonalisables ; l'espace est somme directe des sous–espaces propres. Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé et a toutes ses racines simples est diagonalisable. Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il annule un polynôme scindé dont toutes les racines sont simples.
Sous–espaces caractéristiques. Tout endomorphisme u dont le polynôme caractéristique est scindé peut être trigonalisé : l'espace est somme directe des sous–espaces caractéristiques F_j et il existe une base de chaque F_j telle que la matrice dans cette base de l'endomorphisme induit par u soit triangulaire supérieure ; en outre la dimension de F_j est égal à l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_j. Un tel endomorphisme s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $u = d + n$, où d est diagonalisable, n est nilpotente, et $nd = dn$.

• Valeurs propres d'une matrice carrée, vecteurs (colonnes) propres. Matrices semblables. Diagonalisation, *trigonalisation des matrices carrées. Exemples d'emploi de décomposition en blocs* (*produits, matrices diagonales par blocs, triangulaires par blocs*).

Exercices

1. Rappeler tous les critères de diagonalisation.

2. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E tel que $u^2 = u$.
(a) Quelles sont les valeurs propres de u ?
(b) Montrer que u est diagonalisable.
(c) Relier les sous–espaces propres au noyau et à l'image de u.
(d) Interpréter géométriquement u.

3. Mêmes questions lorsque $u^2 = \mathrm{Id}$.

4. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E tel que $(u+\mathrm{Id})^2 \circ (u - 2\,\mathrm{Id}) = 0$.
(a) Quelles peuvent être ses valeurs propres, son polynôme caractéristique, son polynôme minimal ?
(b) Donner un exemple dans chaque cas.
(c) Dans quels cas u est-elle diagonalisable ?

5. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et u, v des endomorphismes de E. Supposons que u et v commutent i.e. $u \circ v = v \circ u$.
(a) Montrer que tout sous-espace propre de u ou v est stable par u et v.
(b) En déduire que, si u et v sont diagonalisables, alors ils le sont simultanément.
(c) Montrer en particulier que, si u ou v possède n valeurs propres distinctes, où n est la dimension de E, alors u et v sont diagonalisables dans une même base.

6. Lorsque c'est possible, diagonaliser les matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, où θ est un paramètre réel,
$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

7. (*Matrices de Markov*) Soit $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times n$ à coefficients positifs telle que, pour tout $1 \leq i \leq n$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$.
(a) Montrer que 1 est une valeur propre de A.
(b) Montrer que, pour toute valeur propre λ de A, on a $|\lambda| \leq 1$.

8. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$
(a) Déterminer les valeurs propres et les sous–espaces propres de A.
(b) En déduire que A est diagonalisable et diagonaliser A explicitement.
(c) Calculer les puissances A^k de A.
(d) En déduire que la suite A^k converge, préciser dans quel sens, et évaluer sa limite.

9. Soit u un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension finie.
(a) Quels sont ses valeurs propres et ses sous–espaces propres ?
(b) Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $u = 0$.

10. Parmi les polynômes de degré n, lesquels sont polynômes caractéristiques de matrices carrées $n\times n$?

11. Soient A une matrice carrée et P un polynôme.
(a) Si λ est une valeur propre de A, montrer que $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(A)$.
(b) Montrer que $P(\operatorname{vp} A) = \operatorname{vp} P(A)$, où $\operatorname{vp} B$ désigne l'ensemble des valeurs propres complexes d'une matrice carrée B.

Diagonalisations ou trigonalisations explicites (exercices 6 et 8)

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

$$\tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1+i & 2i & 1+i \\ -1-i & -2i & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -i & i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\tfrac{1}{126}\begin{pmatrix} 14 & 14 & 14 \\ -14+10\sqrt{7} & -14+\sqrt{7} & 49-17\sqrt{7} \\ -14-10\sqrt{7} & -14-\sqrt{7} & 49+17\sqrt{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2+\sqrt{7} & 2-\sqrt{7} \\ 4 & -3-\sqrt{7} & -3+\sqrt{7} \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12}+\frac{\sqrt{7}}{12} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{12}-\frac{\sqrt{7}}{12} \end{pmatrix}$$