

1. **Comparaison série et intégrale.** Soit f une fonction continue décroissante, positive définie sur l'intervalle $[n_0, +\infty[$.
 - (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comparer $f(n)$, $f(n+1)$ et $\int_n^{n+1} f(t)dt$.
 - (b) Montrer que la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_{n_0}^{\infty} f(t)dt$ sont de même nature.
 - (c) Donner la nature des séries de Bertrand $\sum \frac{\ln(n)^\beta}{n^\alpha}$.
2. (a) Que peut-on dire sur la nature de la série de terme général u_n qui satisfait la propriété suivante : il existe $l \in]0, 1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| \leq l$? Même question s'il existe $L > 1$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| \geq L$.
 - (b) Énoncer et démontrer le critère de convergence de d'Alembert.
 - (c) Étudier la nature des séries de terme général $u_n = \frac{2^n n!}{n^n}$, $v_n = \frac{e^n n!}{n^n}$, $w_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.
3. Soit (a_n) une suite décroissante de **réels** positifs tendant vers 0. On considère la série de terme général $u_n = (-1)^n a_n$.
 - (a) Montrer que les sommes partielles (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire la convergence de la série de terme général (u_n) .
 - (b) Montrer que $|R_n| \leq a_{n+1} = |u_{n+1}|$.
4. **Transformation d'Abel.** Soient (a_n) , (b_n) deux suites de nombres complexes. On pose, pour $n \geq 1$, $A_n = \sum_{j=1}^n a_j$.
 - (a) Vérifier que $\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n$.
 - (b) Montrer que si, la suite (A_n) est bornée et si la suite (b_n) tend vers 0 en décroissant ou plus généralement en étant à variation bornée ($\sum_{n=2}^{\infty} |b_n - b_{n-1}| < \infty$), alors la série $\sum a_n b_n$ est convergente. De plus $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (b_n - b_{n+1})$.
 Sous ces conditions, montrer que le reste de la série de terme général $a_n b_n$ satisfait $|R_n| \leq 2A \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}|$ où A est un majorant de la suite $|A_n|$ (en particulier, lorsque (b_n) tend vers 0 en décroissant, on a $|R_n| \leq 2A|b_{n+1}|$).

(c) Retrouver les résultats concernant les séries alternées.

5. Etudier la nature de la série de terme général $\frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$. Montrer que,

$$\text{lorsque } \theta \neq 2k\pi, |R_n(\theta)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k^\alpha} \right| \leq \frac{2}{|\sin \frac{\theta}{2}|} \times \frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

6. Etudier la nature (convergence absolue, convergence simple) des séries de terme général

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{x^n}{n^\alpha}, x \in \mathbb{R}; u_n = \frac{\sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}; u_n = \frac{(-1)^n}{n - \log n}; \\ u_n &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha \log n}; u_n = \frac{1}{n^\alpha + (-1)^n n^{3\alpha}}; u_n = \log \left(1 + (-1)^n \frac{\log n}{n} \right); \\ u_n &= \frac{(-1)^n \sin n}{\sqrt{n} + (-1)^n}. \end{aligned}$$

7. Pour tout $\alpha > 0$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$.

(a) Après avoir justifié l'existence de R_n , montrer que $|R_n| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+n)^\alpha}$.

(b) Montrer, que pour tout $x > 0$ et tout $0 < h < x$,

$$\frac{1}{(x-h)^\alpha} + \frac{1}{(x+h)^\alpha} - \frac{2}{x^\alpha} > 0.$$

(c) En déduire la nature de la série de terme général R_n .

8. Critère de Gauss

(a) Quelle est la nature de la série de terme général $t_n = \frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n}$?

(b) Soit u_n le terme général d'une série réelle, $u_n > 0$ pour tout n . On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et une suite r_n tel que pour tout $n \neq 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + r_n \text{ et } \sum |r_n| < \infty.$$

i. Montrer que la série de terme général $\rho_n = \log \frac{u_{n+1}}{u_n} + \frac{\lambda}{n}$ est convergente.

ii. Exprimer $\log u_{n+1} - \log u_n$ à l'aide de t_n et ρ_n . En déduire qu'il existe une suite σ_n convergente telle que pour tout $n \neq 0$ $\log u_n = -\lambda \log n + \sigma_n$.

iii. Pour quelles valeurs de λ la série $\sum u_n$ est-elle convergente (critère de Gauss) ?