

Séries numériques

1. Etudier la nature de la série de terme général u_n et éventuellement calculer sa somme, dans les cas suivants :

(a) $u_n = \ln \left(1 + \frac{2}{n(n+3)} \right)$, pour $n \geq 1$,

(b) $u_n = \frac{E(\sqrt{n+1}) - E(\sqrt{n})}{n}$, pour $n \geq 1$, (E désigne la partie entière),

(c) $u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$, pour $n \geq 2$.

2. Déterminer la nature des séries de terme général : $u_n = \frac{\ln(n!)}{n!}$ et $v_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, $a_n = H_n - \ln n$ et $u_n = a_{n+1} - a_n$.

(a) Montrer que H_n est équivalent à $\ln n$ au voisinage de ∞ .

(b) Montrer que la série $\sum_n u_n$ converge.

(c) En déduire que la suite $(a_n)_n$ est convergente. (Sa limite est notée γ est la *constante d'Euler*).

(d) Déterminer la nature et éventuellement la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^2}$.

4. Déterminer la nature des séries de terme général : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ et $v_n = (-1)^n \sqrt{n} \sin(\frac{1}{n})$.

5. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \sin \left(\frac{n^3 + 1}{n^2 + 1} \pi \right)$.

6. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \sqrt{n^3 + 1}}$.

7. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$. On considère la série de terme général u_n .

Déterminer (a, b) pour que cette série converge et calculer alors sa somme.

8. Discuter suivant $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$ la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$.

9. Discuter suivant $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$ la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})}{n^\alpha + (-1)^n}$.

10. Soit $\sum_{n \geq 1} u_n$ une série complexe convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k \text{ et } v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k u_k.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^N S_n = \sum_{k=1}^N (N-k+1) u_k$.

En déduire que la série $\sum_n v_n$ est convergente et a même somme que $\sum_n u_n$.