UNIVERSITE D'ORLEANS **CAPES 2007-2008**
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES **E. Trélat**

Semaines 13 et 14 - Séries entières.

1. A une série entière $\sum a_n z^n$, on associe

$$R_1 = \sup\{\rho > 0;\ \sum a_n \rho^n \text{ converge}\}$$
$$R_2 = \sup\{\rho > 0;\ \sum |a_n| \rho^n \text{ converge}\}$$
$$R_3 = \sup\{\rho > 0;\ \lim_{n\to\infty} a_n \rho^n = 0\}.$$

Montrer que $R_1 = R_2 = R_3 =$ Rayon de convergence de la série entière. (On pourra remarquer que $R_1 \leq R_2 \leq R_3$ et montrer que $R_3 \leq R_1$.)

2. Déterminer le rayon de convergence des séries suivantes :

$$(2^n + n)z^n,\ \log n z^n,\ n^n z^n,\ n^{\log n} z^n,\ n! z^n,\ a^{n^2} z^n,\ a^n z^{n^2}.$$

3. Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que la série $g(x) = \sum_{n\geq 0} n a_n x^n$ a le même rayon de convergence et exprimer g en fonction de f'. Calculer les sommes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n,\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!} x^n, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n4^n} . x^{n-1},\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+1}.$$

4. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.
(a) Montrer que f est continue en z_0,
(b) En déduire que, pour tout entier $k \geq 1$, la limite, quand z tend vers z_0, de

$$\frac{f(z) - (a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_k(z - z_0)^k)}{(z - z_0)^{k+1}}$$

est égale à a_{k+1}. Ainsi les coefficients a_k sont bien déterminés.
(c) En déduire que $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$.

5. Montrer que si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge alors la fonction $f(x) = \sum a_n x^n$ est continue sur $]-1, 1]$. En déduire que $\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

   Indication : On note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. En utilisant la tranformation d'Abel, montrer que $f(x) - S = (x - 1) \sum_{k=0}^{+\infty} R_k x_k$. Puis, utiliser le fait que $R_n \to 0$, couper la somme en deux, pour conclure.

6. **D'après Capes 79.**
Etant donnés deux entiers $n \geq 1$ et $p \geq 2$, on pose $S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$. On note S_p la limite de $S_p(n)$ lorsque n tend vers l'infini.
Montrer que $\lim_{p\to\infty} S_p = 1$.
On considère la série entière $f(t) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{S_{2p+2}}{\pi^{2p+2}} t^{2p}$. Quel est le rayon de convergence de cette série ?

On note alors $f_N(t)=\sum_{p=0}^{N}(-1)^p\frac{S_{2p+2}}{\pi^{2p+2}}t^{2p}$ la somme des $N+1$ premiers termes de la série $f(t)$. Montrer que

$$f_N(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{t^2+n^2\pi^2}+(-1)^N\left(\frac{t}{\pi}\right)^{2N+2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2N+2}(t^2+n^2\pi^2)}.$$

En déduire que pour tout t fixé, $|t|<\pi$,

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{t^2+n^2\pi^2}.$$

7. **D'après Mines/Ponts et Chaussées 96.**
   1.(a) Considérons pour un entier naturel n donné, $n\geq 1$, la série entière de terme général $u_{n,k}=\frac{1}{k}\left(\frac{-x}{n}\right)^k$, $k\geq 2$. Déterminer le rayon de convergence de cette série. Préciser la convergence de la série aux extrémités $-R_n$ et R_n de l'intervalle de convergence. Soit J_n l'ensemble des réels x pour lesquels la série de terme général $u_{n,k}$, $k\geq 2$ est convergente, soit U_n la fonction définie dans l'intervalle J_n par la relation :

   $$U_n(x)=\sum_{k=2}^{\infty}u_{n,k}(x).$$

   Exprimer $U_n(x)$ au moyen de fonctions élémentaires.
   1.(b) Soit x un réel donné ; vérifier qu'il existe un entier N tel que le réel x appartienne à l'intervalle J_n pour tout n supérieur ou égal à N. Déterminer deux réels A et α tels que $U_n(x)$ soit équivalent à $\frac{A}{n^\alpha}$ lorsque n croît vers l'infini.
   On note $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ pour $x\in]1,\infty[$.
   2.(a) Démontrer l'encadrement : pour tout réel $x>1$, $1<\zeta(x)\leq 1+\frac{1}{x-1}$.
   2.(b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $\frac{(-1)^k}{k}\zeta(k)x^k$, $k\geq 2$. Etudier la convergence aux extrémités de l'intervalle de convergence. On note $F(x)$ la somme de cette série lorsque elle est bien définie.
   3. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $I=]-1,1]$, la fonction F est la somme de la série de fonctions U_n, $n\geq 1$, et qu'elle est continue.

8. La fonction $x\to e^{-1/x^2}$ est-elle développable en série entière au voisinage de zéro ?

9. Pour $x<0$, on considère la fonction

   $$F(x)=x\int_0^1 e^{-xt\log t}dt.$$

   Montrer que F a un développement en série entière de rayon de convergence infini.

10. **D'après Capes 77.**
    A partir du développement de $\frac{1}{\sqrt{1-t^4}}$ en série entière, démontrer que

    $$\omega=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-t^4}}dt$$

    est la somme d'une série dont le terme général de rang n est équivalent à $\frac{\lambda}{n\sqrt{n}}$, λ étant un réel que l'on précisera.

    $$\text{(On rappelle que }\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.\text{)}$$

11. **D'après Capes 88.**
Soit $S(x) = \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt$ pour $x \in \mathbf{R}$.
(a) Prouver que S est développable en série entière sur $\mathbf{R}$ et que pour tout nombre réel x,

$$S(x) = x - \frac{x^2}{2.2!} + \frac{x^3}{3.3!} + ... + (-1)^{p-1} \frac{x^p}{p.p!} + ...$$

(b) On suppose désormais que $x \geq 1$ et on pose $a_p(x) = \frac{x^p}{p.p!}$. Montrer que la suite $p \to a_p(x)$ est décroissante à partir du rang $p = [x]$, où $[x]$ désigne la partie entière de x.
(c) Soit n un entier tel que $n \geq [x]$. On pose

$$S_n(x) = x - \frac{x^2}{2.2!} + ... + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1).(n-1)!}.$$

Prouver que $|S(x) - S_n(x)| \leq \frac{x^n}{n.n!}$ puis que $|S(x) - S_n(x)| \leq \frac{x^n e^{n-1}}{n^{n+1}}$.

12. **D'après Capes 79.**
On considère la fonction ϕ_x définie sur $\mathbf{R}$, pour x fixé dans $\mathbf{R}$,

$$\text{pour } u \neq 0 \ \phi_x(u) = \frac{ue^{ux}}{e^u - 1} \text{ et } \phi_x(0) = 1.$$

(a) Montrer que ϕ_x est continue sur $\mathbf{R}$ et développable en série entière (on n'exprimera pas le rayon) ; on note

$$\phi_x(u) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{u^n}{n!}.$$

Etablir la relation de récurrence

$$B_n(x) = x^n - \frac{1}{n+1} \sum_{q=2}^{n+1} C_{n+1}^q B_{n+1-q}(x).$$

(b) Montrer que, pour tout $n \in N$, B_n est un polynôme de degré n en x et que $B_n(0) = B_n(1)$ pour tout $n \neq 1$ (on pourra comparer ϕ_0 et ϕ_1).

13. **D'après Capes 96.**
On cherche à déterminer et à majorer les solutions de l'équation différentielle

$$-t^2 y'' - 2ty' + y = \arctan(t)$$

qui sont développables en série entière au voisinage de 0.
1. On suppose qu'une solution y de l'équation différentielle est, sur un intervalle $]-R, R[$, somme d'une série entière $\sum_{p \geq 0} a_p t^p$.
Montrer que $a_{2k} = 0$ et exprimer a_{2k+1} en fonction de k.
2. Quel est le rayon de convergence de la série ainsi obtenue ? Conclure sur l'existence d'une solution développable en série entière au voisinage de 0.
3. La série est-elle uniformément convergente sur $[-1, 1]$? Les fonctions dérivées y' et y'' sont-elles sommes des séries dérivées sur $[-1, 1]$?
4. Pour n donné et $t \in]0, 1[$, trouver un majorant indépendant de t de l'erreur commise en remplaçant $y(t)$ par la somme partielle $\sum_{0 \leq k \leq n} a_{2k+1} t^{2k+1}$. Déterminer une valeur de n qui assure que cette erreur reste inférieure à 10^{-5}. Calculer une valeur approchée à 10^{-5} près de $\lambda = y\left(\frac{1}{3}\right)$ et $\mu = y\left(\frac{2}{3}\right)$.