

Semaine 1 - Suites.

- (1) Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.
- (a) Montrer que si  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers  $l$  alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.
  - (b) Montrer que si  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.
- (2) Étudier la convergence des suites  $u_n = \sin n$  et  $u_n = \cos n$ . Pour  $\alpha$  réel, étudier les suites  $u_n = \sin \alpha n$  et  $v_n = \cos \alpha n$ .
- (3) Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites convergentes. Que peut-on dire des suites  $x_n = \inf(u_n, v_n)$  et  $y_n = \sup(u_n, v_n)$  ?
- (4) Soient  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe un entier naturel  $n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ , on ait

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Montrer que

- (a) Si  $(b_n)$  tend vers 0 alors  $(a_n)$  converge vers 0.
  - (b) Si  $(a_n)$  tend vers  $+\infty$  alors  $(b_n)$  tend vers  $+\infty$ .
  - (c) Soit  $(u_n)$  une suite réelle telle que  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$  tende vers  $l \in [0, 1[$ , alors la suite  $(u_n)$  tend vers 0.
- (5) Soit  $k \in [0, 1[$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres complexes telle que, pour tout  $n \geq 0$ , on ait

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq k|u_{n+1} - u_n|.$$

Montrer que la suite  $(u_n)$  converge.

- (6) Soit  $(u_n)$  une suite réelle telle que  $n(u_{n+1} - u_n)$  tende vers 1 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Montrer que  $u_n$  tend vers l'infini.
- (7) **Série harmonique.** Soit  $(u_n)$  la suite définie pour  $n \geq 1$  par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

- (a) Montrer que  $v_n = u_{2n} - u_n$  est bornée. Que peut-on conclure ?
- (b) Montrer que

$$v_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}.$$

- (c) Montrer que  $w_n = v_n + \frac{1}{n}$  est une suite décroissante. Conclure.

- (8) Soit  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres complexes. On note  $z_n = a_n + ib_n$  avec  $a_n$  et  $b_n$  réels. Montrer que  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente si et seulement si  $(a_n)$  et  $(b_n)$  convergent. A-t-on un résultat analogue avec module et argument ?
- (9) Déterminer pour quelles valeurs de  $a$  et  $b$  (réels strictement positifs), la suite  $(u_n)$  de terme général  $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$  est convergente.
- (10) Soit  $(u_n)$  une suite réelle qui tend vers l'infini. Démontrer que l'ensemble  $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$  admet un plus petit élément.
- (11) Soit  $(u_n)$  une suite réelle. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est non majorée si et seulement si elle possède une suite extraite qui tend vers l'infini.