

Rapidité de convergence

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels convergeant vers ℓ et telle que la suite $\left(\frac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ admette une limite λ .

(a) Montrer que $\lambda \in [0, 1]$.

(b) – Si $\lambda = 1$ on dit que la convergence de la suite est *lente*.

– Si $\lambda \in]0, 1[$ on dit que la convergence de la suite est *géométrique*.

– Si $\lambda = 0$ on dit que la convergence de la suite est *rapide*.

Pour les suites suivantes déterminer leur vitesse de convergence :

$$\left(\frac{1}{n}\right), \quad \left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \text{ avec } \alpha > 0, \quad \left(\frac{1}{\ln n}\right), \quad (q^n) \text{ avec } |q| \in]0, 1[, \quad \left(\frac{1}{n!}\right).$$

2. (a) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Montrer que cette suite est convergente et déterminer sa vitesse de convergence.

(b) Mêmes questions pour la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{2^n}$.

(c) Mêmes questions pour la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

$$\text{On établira que pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(n+1)!} \leq e - w_n \leq \frac{2}{(n+1)!}.$$

3. On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

(a) (i) Montrer que cette suite est convergente. On note ℓ sa limite.

(ii) Montrer que $\forall n \geq 1 \quad \frac{1}{n+1} \leq \ell - S_n \leq \frac{1}{n}$.

(iii) En déduire la vitesse de convergence de cette suite.

(iv) Combien faudrait-il calculer de termes pour obtenir ℓ avec une précision de 10^{-6} ?

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = S_n + \frac{1}{n+1}$ et $T'_n = S_n + \frac{1}{n}$.

(i) Que peut-on dire des suites $(T_n)_n$ et $(T'_n)_n$?

(ii) Combien faudrait-il calculer de termes de la suite (T_n) pour obtenir ℓ avec une précision de 10^{-6} ?

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = T_n + \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$ et $U'_n = T_n + \frac{1}{2n(n+1)}$.

(i) Que peut-on dire des suites $(U_n)_n$ et $(U'_n)_n$?

(ii) Combien faudrait-il calculer de termes de la suite (U_n) pour obtenir ℓ avec une précision de 10^{-6} ?