

Semaine 4 - Suites monotones, suites adjacentes.

1. On considère les deux suites

$$u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}.$$

- (a) Montrer qu'elles sont adjacentes.
(b) On note e leur limite commune. En raisonnant par l'absurde, montrer que e est irrationnel.

2. Soit $(x_n)_n$ une suite de réels positifs, décroissante telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Pour tout n entier, on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k x_k, \text{ puis } v_n = u_{2n} \text{ et } w_n = u_{2n+1}.$$

- (a) Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.
(b) En déduire la convergence de la suite (u_n) . On note $S = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x_k$ et on dit que S est une série alternée.
(c) Montrer que $|S - u_n| \leq x_{n+1}$.

3. Soit $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'entiers, avec $q_0 \geq 2$. On pose

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{q_0} \\ u_1 = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} \\ \dots \\ u_n = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} + \dots + \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n} \end{cases}$$

- (a) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée, et converge vers un réel $x \in [\frac{1}{2}, 1]$.
(b) Montrer que s'il existe $k \geq 0$ tel que pour tout $n \geq k$, $q_n = q_k$, alors x est rationnel.

4. Soient a et b des réels. tels que $0 < a < b$. On définit u_n et v_n pour $n \geq 0$ par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

5. Soient u_0 et v_0 deux réels tels que $0 < u_0 < v_0$. On pose

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + \lambda v_n}{1 + \lambda} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + \mu v_n}{1 + \mu} \end{cases}$$

Montrer que, si $0 < \lambda < \mu$, alors $u_0 < u_1 < v_1 < v_0$, et étudier les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

6. On considère les suites

$$u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}, \quad x_n = \ln n.$$

- (a) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $u_n < x_n < v_n$. Interprétation géométrique?
(b) Etudier la convergence des suites (u_n) , (v_n) et (x_n) .
(c) Montrer que les suites $(1 + u_n - x_n)$ et $(v_n - x_n)$ sont adjacentes.
Leur limite est notée γ et est appelée constante d'Euler.
(d) Décrire un algorithme pour calculer γ à 10^{-3} près.