

Semaine 3 - Suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer qu'il n'est pas possible de construire une suite qui satisfasse

$$u_0 \in]0, \infty[, u_{n+1} = \ln(u_n).$$

2. Montrer que les suites définies par $u_0 \in [0, \pi/2]$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$ sont convergentes et que les suites définies par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \operatorname{sh}(u_n)$ divergent.
3. On considère la suite définie par u_0 et la relation de récurrence homographique

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{u_n + 2}.$$

- (a) Montrer qu'il existe deux valeurs a et b , $a < b$, pour lesquelles la suite est constante.
- (b) Montrer que, si $u_0 \neq a$ et $u_0 \neq b$, alors il en est de même pour u_n . Calculer alors $\frac{u_{n+1}-a}{u_{n+1}-b}$ en fonction de $\frac{u_n-a}{u_n-b}$.
- (c) En déduire que la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n-a}{u_n-b}$ est géométrique, calculer sa limite et en déduire la limite de u_n .
4. Etude de la suite $u_{n+1} = f(u_n) = 1 + \frac{1}{u_n}$, avec $u_0 > 0$.

1ère méthode.

- (a) Construire u_0, u_1, u_2, u_3 .
- (b) Chercher la limite éventuelle de la suite.
- (c) En utilisant la décroissance de f , établir que (u_n) est bornée entre 1 et 2, à partir du rang 2.
- (d) Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes, et conclure sur la convergence de la suite (u_n) .

2ème méthode. On suppose ici que $u_0 \geq 3/2$.

- (a) Montrer que $3/2 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier n .
- (b) Soit l l'unique solution positive de $f(l) = l$. Montrer que $|u_{n+1} - l| \leq \frac{4}{9}|u_n - l|$.
- (c) Conclure.
5. Soit $a > 0$. Étudier les suites définies par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right)$.
6. Étudier, selon les valeurs de u_0 , la suite définie par $u_{n+1} = \frac{(1-u_n)^2}{1+u_n}$.
7. Soient a et b des réels. tels que $0 < a < b$. On définit u_n et v_n pour $n \geq 0$ par

$$\begin{aligned} u_0 &= a \\ v_0 &= b \\ u_{n+1} &= \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} \end{aligned}$$

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

(Remarques : que peut-on dire si $0 < b < a$? Donner une interprétation géométrique. Peut-on estimer la vitesse de convergence ?)

8. Étudier la suite définie par

$$\begin{aligned}u_0 &= -1 \\u_{n+1} &= \sqrt{2 + u_n}\end{aligned}$$

9. Soient u_0 et v_0 deux réels tels que $0 < u_0 < v_0$. On pose

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= \frac{u_n + \lambda v_n}{1 + \lambda} \\v_{n+1} &= \frac{u_n + \mu v_n}{1 + \mu}\end{aligned}$$

1) Comment choisir λ et μ pour que $u_0 < u_1 < v_1 < v_0$?

2) Avec ces valeurs, étudier les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.