Suites divergentes …

Exercice 1 ***La série harmonique***

On considère la suite (u_n) définie par, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) de terme général $v_n = u_{2n} - u_n$ est bornée.

b) Étudier le comportement de la suite (u_n) (monotonie, limite éventuelle).

c) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$.

d) Étudier le comportement de la suite (v_n) (monotonie, limite éventuelle).

Exercice 2 Étudier le comportement (monotonie, limite éventuelle) de la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 (réel) et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$.

Exercice 3 Étudier le comportement (monotonie, limite éventuelle) de la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 (réel) et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = e^{u_n} - 1$.

Exercice 4 Soit (u_n) à termes réels strictement positifs. Démontrer que si la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet pour limite un nombre réel $\mathrm{A} > 1$, alors la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

Exercice 5

Existe-t-il un réel α non nul tel que la suite de terme général $\sin(n\alpha)$ soit convergente ?

Exercice 6 Démontrer que toute suite périodique non constante est une suite divergente.

Exercice 7 Soit (u_n) une suite réelle qui tend vers $+\infty$. Démontrer que l'ensemble $\{u_n \,;\, n \in \mathbf{N}\}$ admet un plus petit élément.

Exercice 8 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. Démontrer que si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est non majorée alors elle possède une suite extraite qui tend vers $+\infty$.

Exercice 9

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle bornée qui diverge. Démontrer qu'elle possède deux suites extraites qui convergent vers des limites distinctes.

Exercice 10

Soit $f :]a,b[\to \mathbf{R}$ et $x_0 \in]a,b[$. On suppose que, pour toute suite $(u_n)_{n\geq 0}$ qui converge vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$. Peut-on en déduire que la fonction *f* admet pour limite $+\infty$ en x_0 ?

Exercice 11

Pour tout entier naturel non nul *n*, on pose $\rho(n)$ le plus petit diviseur premier de *n*.

a) Démontrer que la suite (u_n) définie par, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \frac{\rho(n)}{n}$, n'a pas de limite.

b) Etudier, pour tout entier $k \geq 1$, la convergence de la suite (u_{kn}).

A. Leroy