Accroissements finis …

Question de cours ***Le principe de Lagrange***

Soit I un intervalle ouvert non vide de **R** et une application *f* de I vers **R**, dérivable.
Démontrer les propositions suivantes :

1. « *f* est constante sur I » si et seulement si « pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) = 0$ ».
2. « *f* est croissante sur I » si et seulement si « pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) \geq 0$ ».
3. « *f* est strictement croissante sur I » si et seulement si « pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) \geq 0$, et l'ensemble des $x \in \mathrm{I}$ tels que $f'(x) = 0$ ne contient pas d'intervalle ouvert non vide ».

Exercice 1 ***Un théorème de prolongement***

1) Soit I un intervalle ouvert non vide de **R,** une application *f* de I vers **R** et *a* un point de I. On suppose qu'il existe un intervalle $[a, a+r[$ inclus dans I sur lequel *f* est continue et tel que *f* soit dérivable sur $]a, a+r[$.

a) Démontrer que si f' admet une limite finie ℓ en *a* à droite alors *f* est dérivable en *a* à droite.

b) La réciproque est-elle vraie ?

2) Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \mathrm{Arcsin}(1-x^2)$ est de classe C^1 sur l'intervalle [0 , 1].

Exercice 2 ***Théorème des accroissements finis généralisés***

Soit *a* et *b* des réels tels que $a < b$. Soit *f* et *g* des applications $[a, b] \to \mathbf{R}$, continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $(g(b) - g(a))f'(c) = (f(b) - f(a))g'(c)$.

Exercice 3 ***La règle de L'Hospital (1696)***

Soit I un intervalle ouvert non vide de **R,** des applications *f* et *g* de I vers **R** dérivables sur I.

a) Démontrer que si g' ne s'annule pas sur I, alors *g* est injective.

b) On suppose que g' ne s'annule pas sur I et qu'en un point *a* de I, $f(a) = g(a) = 0$.

Démontrer que si $\dfrac{f'}{g'}$ admet une limite finie ℓ en *a*, alors $\dfrac{f}{g}$ admet également pour limite ℓ en *a*.

Exercice 4 Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbf{R}$ une application dérivable. Démontrer que si f' admet une limite finie ℓ en $+\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$. Étudier l'implication réciproque.

Exercice 5 Soit $\alpha \in]0,1[$.

a) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\dfrac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq (n+1)^{\alpha} - n^{\alpha} \leq \dfrac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$.

b) En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{1-\alpha}}$ quand *n* tend vers $+\infty$.

Exercice 6 Etudier la limite de $n^{\frac{n+1}{n}} - (n-1)^{\frac{n}{n-1}}$ quand *n* tend vers $+\infty$.

Exercice 7 **1)** Démontrer que, pour tout $t \in]0,1]$, $\dfrac{t}{1+t} < \ln(1+t) < t$.

2) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

3) a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tous réels $0 < a < b$: $(n+1)a^n < \dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} < (n+1)b^n$.

b) Prouver que les suites $\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right)$ et $\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$ sont adjacentes et préciser leur limite.

Exercice 8 Étudier la limite éventuelle de la suite définies par : $u_0 \in \mathbf{R}$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

A. Leroy