Université d'Orléans **Année 2007/2008**
CAPES de Mathématiques **Semaine 9**

Relations métriques et trigonométriques dans le triangle …

Exercice 1 Démontrer que la somme des carrés des mesures des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des mesures de ses diagonales.

Exercice 2

a) Dans un triangle ABC du plan affine euclidien, montrer que l'on peut déduire la « loi des sinus » $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$ de celle des cosinus $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$ (et de ces deux « sœurs »).

b) De même, démontrer que, du groupe de relations « $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$ et $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$ », on peut déduire la loi des cosinus.

Exercice 3 Démontrer qu'un triangle ABC du plan affine euclidien est rectangle en A si et seulement si : $\sin^2\hat{A} = \sin^2\hat{B} + \sin^2\hat{C}$.

Exercice 4

Six nombres positifs strictement sont donnés, $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, tels que α, β, γ appartiennent à l'intervalle $]0, \pi[$ et $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.
Existe-t-il un triangle dont les trois nombres a, b, c sont les longueurs des côtés et les trois nombres α, β, γ les mesures des angles géométriques correspondants ?

Exercice 5 Même question en supposant cette fois que $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$.

Exercice 6

1. Soit *a*, *b* et *c* trois nombres strictement positifs *a*, *b* et *c* tels que $a < b + c$. Existe-t-il un triangle dont ce sont les mesures des côtés ?
2. Et si $a < b + c$, $b < c + a$ et $b < c + a$?
3. Et si $|b - c| < a < b + c$?

Exercice 7 Démontrer que, dans un triangle non isocèle, au plus grand côté est opposé le plus grand angle.

Exercice 8

a) Montrer(avec toujours les mêmes notations) que : $\begin{cases} a = b\cos\hat{C} + c\cos\hat{B} \\ b = c\cos\hat{A} + a\cos\hat{C} \\ c = a\cos\hat{B} + b\cos\hat{A} \end{cases}$.

b) Six nombres positifs strictement sont donnés, $a, b, c, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, tels que $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ appartiennent à l'intervalle $]0, \pi[$ et qui vérifient les relations ci-dessus. Existe-t-il un triangle dont les trois nombres a, b, c sont les longueurs des côtés et les trois nombres $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ les mesures des angles géométriques correspondants ?

Exercice 9 Soit A, B, C trois points non alignés du plan affine euclidien.
On désigne par R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.
a) Exprimer R^2 en fonction de *a*, *b* et *c*.
b) Montrer que si, dans un repère orthonormal, les coordonnées des points A, B et C sont des entiers relatifs, alors le nombre R^2 est rationnel.

Exercice 10 Placer deux points A et B. **<u>Toutes les constructions doivent être faites au compas.</u>**

a) Construire (en expliquant comment) le symétrique E du point B par rapport au point A.
b) Tracer les cercles de centre E et de rayon BD, et de centre B et de rayon EB. Ils se coupent (?) en F et G.
c) Tracer les cercles de rayon BD et de centre respectif F et G. et de rayon EB. Ils se coupent en deux points. Démontrer que l'un de ces points est le milieu du segment [AB].

A. Leroy