Applications linéaires, matrices.

---

1 - Soit E $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme.
1) Montrer les équivalences
(a) $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im f} \Leftrightarrow \operatorname{Im f} = \operatorname{Im f}^2$
(b) $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im f} = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{Ker f} = \operatorname{Ker f}^2$
Qu'en déduit-on si f est un projecteur ($f = f^2$)? Donner un exemple d'endomorphisme f qui n'est pas un projecteur et qui vérifie $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im f}$.
2) Si E est de dimension finie, montrer que

$$\operatorname{Im f} = \operatorname{Im f}^2 \Leftrightarrow \mathrm{E} = \operatorname{Ker f} + \operatorname{Im f} \Leftrightarrow \operatorname{Ker f} \cap \operatorname{Im f} = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{Ker f} = \operatorname{Ker f}^2$$

2 - Soient u et v deux applications linéaires d'un espace vectoriel de dimension finie E dans un espace vectoriel F. Montrer que

$$\operatorname{rg}(u+v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)\,.$$

En déduire que

$$|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leq \operatorname{rg}(u+v) \leq \min\{\dim E, \dim F, \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)\}$$

Si de plus, $u+v$ est un automorphisme et $u \circ v = 0$, montrer que $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) = \dim E$.

3 - Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
1) Montrer que sont équivalentes:
(a) f est injective,
(b) $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$,
(c) il existe $g \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $g \circ f = Id_E$.
2) Montrer l'équivalence des propositions suivantes :
(a) f est surjective,
(b) $\operatorname{Im}(\mathrm{f}) = \mathrm{F}$,
(c) il existe $g \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $f \circ g = Id_F$.

4 - Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et u un endomorphisme sur E. On désigne par N_k le noyau de u^k et par I_k l'image de u^k.
a) Montrer que la suite (N_k) est croissante, la suite (I_k) est décroissante (pour l'inclusion).

b) Montrer qu'il existe un entier m tel que $\forall\, k \geq m$, $I_k = I_m$ et $N_k = N_m$ et pour tout $k \leq m-1$, $I_{k+1} \subset I_k$, $N_k \subset N_{k+1}$ (inclusions strictes).
c) Montrer que
$$E = N_m \oplus I_m\,.$$

5 - Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, et A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
On considère l'application $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM - MA$.
Montrer que f est linéaire, déterminer son noyau et son image. Donner une base du noyau.
Déterminer la matrice de f dans la base canonique.

6 - On considère l'espace $E = \mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 3.
1) Montrer que l'application f qui au polynôme P associe le polynôme Q défini par $Q(X) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$ est un endomorphisme de E.
2) Déterminer le noyau et l'image de f. Quel est son rang?

7 - On considère l'espace $E = \mathbb{C}_n[X]$ des polynômes à coefficients complexes de degré $\leq n$.
1) Montrer que l'application $T : P(X) \mapsto P(X+1)$ est un isomorphisme de E.
2) Montrer que la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & C_1^1 & C_2^1 & \dots & C_n^1 \\ 0 & 0 & C_2^2 & \dots & C_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & C_n^n \end{pmatrix}$$
est inversible et déterminer son inverse.
3) a) Déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme $\Delta = T - Id$.
b) On pose $P_0 = 1$, et pour k entier, $1 \leq k \leq n$,
$$P_k = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}\,.$$
Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de E et déterminer la matrice de Δ dans cette base.
Retrouver ainsi le résultat du a).

8 - Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p un endomorphisme de E.
1) Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes:
(a) $p^2 = p$ (p est un projecteur),
(b) $\mathrm{Im}\,(\mathrm{p}) \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{p}) = \mathrm{E}$ et p est la projection sur $\mathrm{Im}\,(\mathrm{p})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.
2) Soit p un projecteur.
a) Montrer que $Id_E - p$ est un projecteur.

b) Montrer que $\mathrm{Ker}(Id_E - p) = \mathrm{Im\,p}$, $\mathrm{Ker\,p} = \mathrm{Im\,(Id_E - p)}$.
c) Trouver une base de E dans laquelle la matrice représentative de p est diagonale à coefficients diagonaux dans $\{0, 1\}$.
3) Donner un exemple d'endomorphisme f de E qui n'est pas un projecteur et qui vérifie $\mathrm{Im\,(f)} \oplus \mathrm{Ker(f)} = \mathrm{E}$.

9 - Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on rappelle que si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 est l'application σ définie par $\sigma(x) = x_1 - x_2$ où $x = x_1 + x_2$ est l'unique décomposition de x avec $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$.
Montrer que $\sigma = 2p - Id_E$ où p est la projection sur E_1 parallèlement à E_2.
1) Montrer qu'une telle application vérifie $\sigma^2 = Id_E$ (σ est involutive).
2) Soit σ un endomorphisme de E tel que $\sigma^2 = Id_E$. Montrer que $\mathrm{Ker}(Id_E + \sigma)$ et $\mathrm{Ker}(Id_E - \sigma)$ sont deux sous-espaces supplémentaires de E et σ est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(Id_E - \sigma)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(Id_E + \sigma)$.

10 - Soit $n \geq 1$ un entier, on désigne par $(E_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$).
a) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, calculer $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$.
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on ait $AM = MA$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$. (A est une matrice d'homothétie vectorielle).
Montrer que la conclusion est la même si on suppose que $AM = MA$ pour tout $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (matrices carrées d'ordre n inversibles).
c) En déduire que si f un endomorphisme de E ($\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie) qui commute avec tout automorphisme de E, alors f est une homothétie vectorielle.

11 - Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on rappelle que la trace de A, notée $\mathrm{tr}(A)$, est définie par $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
1) a) Montrer que l'application trace, $X \mapsto \mathrm{tr}(X)$, est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
b) Montrer que si X, $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX)$.
c) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et f un endomorphisme de E, montrer que si M et M' sont des matrices représentatives de f, on a $\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(M')$.
Cette propriété permet de définir la trace de f comme étant la trace d'une matrice représentative (quelconque) de f.
2) Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout couple (X, Y) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on ait $\varphi(XY) = \varphi(YX)$.
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(X) = \lambda\,\mathrm{tr}(X)$.

12 - Soient A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'équation (en M) : $M + \mathrm{tr}(M)A = B$.

13 - Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E de rang 1.
a) Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u^2 = \lambda u$.
b) On suppose de plus que E est de dimension finie et que $\lambda \neq 1$. Montrer que $u - Id_E$ est un automorphisme et calculer son inverse en fonction de λ, u et Id_E.