

Barycentres.

1 - Donner une (ou plusieurs) constructions du barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 3)$. Que se passe-t-il si on essaie d'appliquer ces constructions à $(A, 2)$ et $(B, -2)$?
 Plus généralement, donner une construction du barycentre d'un système de deux points pondérés à poids rationnels.

2 - Dans le plan affine réel on considère trois points non alignés A, B, C . Soient α, β, γ trois réels non nuls tels que $\alpha + \beta + \gamma = 0$. On désigne par A' la barycentre de $(B, \beta), (C, \gamma)$, B' celui de $(A, \alpha), (C, \gamma)$, et C' celui de $(A, \alpha), (B, \beta)$.
 Montrer que les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont parallèles.

3 - *Théorème de Ceva.*

Soient A, B, C, M des points d'un plan affine réel, avec A, B, C non alignés. On suppose que les droites (AM) et (BC) sont sécantes en $A' \neq C$, que les droites (BM) et (CA) sont sécantes en $B' \neq A$, et que les droites (CM) et (AB) sont sécantes en $C' \neq B$.

Montrer que

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$

4 - Soient A et B deux points distincts et G le barycentre du système $(A, \alpha), (B, \beta)$ (avec $\alpha + \beta \neq 0$). Comment choisir α' et β' pour que $(A, \alpha'), (B, \beta')$ ait un barycentre G' symétrique de G par rapport au milieu I de $[AB]$?

5 - Montrer que deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont même centre de gravité si et seulement si $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 0$.

6 - Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé d'origine O , soit $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ les points d'affixes respectives $(e^{i \frac{2k\pi}{n}})_{1 \leq k \leq n}$ (sommets d'un polygone régulier).

a) Montrer que l'isobarycentre des points $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ est l'origine.

b) Quel est l'isobarycentre des points $(A_k)_{2 \leq k \leq n}$? (On a retiré le point A_1).

7 - Soit $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ n points pondérés avec $n \geq 3$ et $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$.

a) Montrer qu'on peut trouver un sous-système de $n - 1$ points ayant un barycentre partiel.

b) En déduire l'existence d'une permutation $(i_k)_{1 \leq k \leq n}$ de $\{1, \dots, n\}$ telle que, pour tout entier $1 \leq k \leq n$, le système pondéré $(A_{i_1}, \alpha_{i_1}), \dots, (A_{i_k}, \alpha_{i_k})$ admette un barycentre.

c) Qu'en déduire pour la constructibilité du barycentre d'un système pondéré à poids rationnels ?

8 - Soit \mathcal{E} un espace affine réel ; (A_0, A_1, \dots, A_p) $p + 1$ points de \mathcal{E} . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall i \in \llbracket 0, p \rrbracket \{ \overline{A_i A_j} / j \neq i, j = 0, \dots, p \}$ est un système libre de $\overline{\mathcal{E}}$,

(ii) $\exists i \in \llbracket 0, p \rrbracket \{ \overline{A_i A_j} / j \neq i, j = 0, \dots, p \}$ est un système libre de $\overline{\mathcal{E}}$,

(iii) aucun des A_i n'est barycentre des autres.

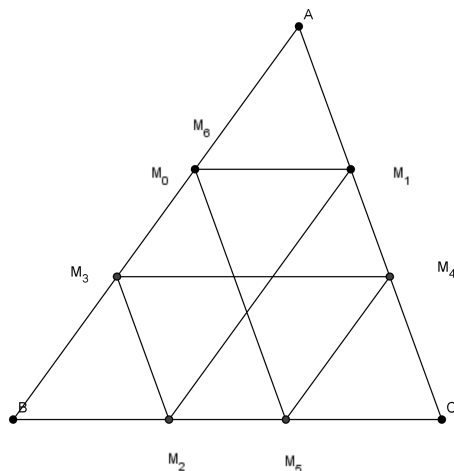
Si l'une de ces conditions est réalisée on dit que la famille $(A_i)_{0 \leq i \leq p}$ est affinement libre. Si l'un quelconque des systèmes $\{\overrightarrow{A_i A_j} / j \neq i, j = 0, \dots, p\}$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, on dit que $(A_i)_{0 \leq i \leq p}$ est un repère affine.

9 - a) Montrer, sur un exemple simple (par exemple deux points A, B et leur milieu I), que si M est barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$ et barycentre de $(A, \alpha'), (B, \beta'), (C, \gamma')$, les coefficients ne sont pas à priori proportionnels.

b) Montrer que, dans l'espace affine réel \mathcal{A} de dimension n , si $(A_i)_{0 \leq i \leq n}$ est un repère affine, alors les représentations de M comme barycentre des A_i sont proportionnelles.

Un système $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq n}$ tel que M soit barycentre de $((A_i, \alpha_i))_{0 \leq i \leq n}$ est appelé un système de coordonnées barycentriques de M .

10 - Soit ABC un triangle non aplati du plan affine réel, et soit $M_0 \in [AB]$. On construit les points $(M_i)_{1 \leq i \leq 6}$ de la façon suivante :



$(M_0M_1) \parallel (BC)$ et $M_1 \in (AC)$, $(M_1M_2) \parallel (AB)$ et $M_2 \in (BC)$
 $(M_2M_3) \parallel (AC)$ et $M_3 \in (AB)$, $(M_3M_4) \parallel (BC)$ et $M_4 \in (AC)$
 $(M_4M_5) \parallel (AB)$ et $M_5 \in (BC)$, $(M_5M_6) \parallel (AC)$ et $M_6 \in (AB)$.

Montrer que $M_0 = M_6$.

11 - Soit ABC un triangle équilatéral dans le plan affine euclidien. On désigne par H le projeté orthogonal du milieu I de $[BC]$ sur (AB) .

a) Montrer que H est le barycentre du système de points pondérés $((A, 1), (B, 3))$.

b) Montrer que le milieu G de $[IH]$ est le barycentre de $(A, 1), (B, 5), (C, 2)$.

12 - Soit $ABCD$ un quadrilatère du plan. Soient G le centre de gravité du triangle ABD , H le centre de gravité du triangle CBD , K le milieu de $[GH]$, I le milieu de $[AC]$, et J le milieu de $[BD]$.

1) Montrer que K est le barycentre de $((A, 1), (B, 1), (D, 1), (C, 1), (B, 1), (D, 1))$.

2) En déduire que K est le barycentre de $((A, 1), (B, 2), (C, 1), (D, 2))$.

3) Montrer que I, J, K sont alignés et exprimer \overrightarrow{IK} en fonction de \overrightarrow{IJ} .

4) Soit E le centre de gravité du triangle ABC , F le centre de gravité du triangle DAC , et L le milieu de $[EF]$. Montrer que I, J, K, L sont alignés.

5) Que peut-t-on dire du quadrilatère $ABCD$ si G et H sont confondus ?