UNIVERSITÉ D'ORLÉANS
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Comparaison des fonctions :
domination, prépondérance, équivalence.

---

1 - Comparer les fonctions $f : x \mapsto x\sin x + \cos x$ et $g : x \mapsto x \sin x$ pour les relations de domination, de prépondérance, et d'équivalence quand x tend vers $+\infty$.

2 - Soient f et g des fonctions de $A \subset \mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $A \cup \{a\}$ soit un intervalle non réduit à un point. On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$.

a) Montrer que si $f(x)$ et $g(x)$ tendent vers $\ell \neq 1$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ quand x tend vers a, alors $\ln(f) \underset{a}{\sim} \ln(g)$.

b) En général e^f et e^g **ne sont pas** équivalentes quand x tend vers a. Montrer que $e^f \underset{a}{\sim} e^g$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a}(f(x) - g(x)) = 0$.

c) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$ (si f et g sont à valeurs > 0).

3 - Donner un exemple de fonctions f_1, f_2, g_1, g_2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f_1 \underset{0}{\sim} g_1$, $f_2 \underset{0}{\sim} g_2$ mais $f_1 + f_2$ **n'est pas** équivalente à $g_1 + g_2$ en 0.
Montrer cependant que si g_1 et g_2 sont à valeurs ≥ 0 au voisinage de 0 et $f_1 \underset{0}{\sim} g_1$, $f_2 \underset{0}{\sim} g_2$, alors $f_1 + f_2 \underset{0}{\sim} g_1 + g_2$.

4 - Déterminer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2(e^{1/x} - e^{1/(x-1)})$ (2) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} \operatorname{ch}(\sqrt{x^2+1})$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} ((\ln(1+x))^\alpha - (\ln x)^\alpha)$ où $(\alpha > 0)$ (4) $\lim\limits_{x \to e} (\ln x)^{\tan \frac{\pi x}{2e}}$

(5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ (6) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ (où $0 < a < b$)

5 - Donner un équivalent simple, quand x tend vers 0, des fonctions suivantes (définies sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$, ou $\mathbb{R}_+^*$) :

(1) $x \mapsto (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$ (2) $x \mapsto (e+x)^e - e^{(e+x)}$

(3) $x \mapsto exp\left(\frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x}{\cos x}}\right) - 1$ (4) $x \mapsto (1 - \cos x)^{x^2} - x^{1 - \cos x}$

6 - Déterminer un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{\ln x}{x} \quad , \quad x \mapsto \left(\frac{\operatorname{Arctan}(1+x)}{\operatorname{Arctan} x}\right)^x \quad , \quad x \mapsto \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^x - 1 \, .$$

7 - Soit a un réel > 0.
1) Montrer que la fonction $f : x \mapsto x(\ln x)^a$ est une bijection strictement croissante de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.
2) Soit g sa fonction réciproque. Montrer que g tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Trouver un équivalent simple de g lorsque x tend vers $+\infty$. (Remarquer que $\ln(\ln g) = o(\ln g)$ au voisinage de $+\infty$).

8 - a) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k! \underset{n \to +\infty}{\sim} n!$ (on pourra majorer $\sum_1^{n-2} \frac{k!}{n!}$).
b) Montrer que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n!}$.

9 - Déterminer un équivalent de la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

10 - Déterminer un équivalent de $\ln(n!)$ quand n tend vers $+\infty$.

11 - Soient f et g des fonctions positives continues sur $[a, b[$ telles que $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$. Montrer que les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature et
a) si elles convergent, $\int_x^b f(t)dt \underset{x \to b}{\sim} \int_x^b g(t)dt$,
b) si elles divergent, $\int_a^x f(t)dt \underset{x \to b}{\sim} \int_a^x g(t)dt$.

12 - a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente et que, pour tout $x > 0$, on a $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2x^2} dt$.
b) En déduire un équivalent simple de $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$ quand $x \to +\infty$.
c) Déterminer un équivalent simple de $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt - \frac{e^{-x^2}}{2x}$ quand $x \to +\infty$.
d) Déterminer un équivalent simple de $\int_0^x e^{t^2} dt$ et $\int_2^x \frac{dt}{\ln t}$ quand x tend vers $+\infty$.

13 - Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ l'équation, $\tan x - x = 0$, admet une unique solution u_n dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$. Montrer que $u_n - n\pi \to \frac{\pi}{2}$, chercher un équivalent de $u_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$.

14 - Soit f une fonction de $]-1, 1[$ dans $\mathbb{R}$ continue en 0. On suppose qu'il existe $\lambda \in]0, 1[$, $C > 0$ et $\alpha > 0$ tels que

$$f(x) - f(\lambda x) \underset{x \to 0}{\sim} C x^\alpha \, .$$

Montrer que $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{C}{1-\lambda^\alpha} x^\alpha$.