

Semaines 20 et 23 - Coniques.

1. Dans le plan euclidien, on considère une droite D et un cercle \mathcal{C} tels que $D \cap \mathcal{C} = \emptyset$. Montrer que le lieu géométrique des points équidistants de D et de \mathcal{C} est une parabole, dont on précisera les éléments caractéristiques.
2. Expliquer comment déterminer une parabole, connaissant sa directrice et deux points de cette parabole.
3. Soit \mathcal{P} une parabole de foyer F , de directrice \mathcal{D} . Soit M un point de \mathcal{P} et H le projeté orthogonal de M sur \mathcal{D} . Montrer que la médiatrice de $[FH]$ est la tangente à \mathcal{P} en M .
4. Montrer que si un cercle rencontre une parabole en quatre points, l'isobarycentre de ces quatre points est sur l'axe de la parabole.
5. Caractériser l'ensemble des points du plan affine euclidien dont les coordonnées x et y vérifient :

$$2x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 6y - 1 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 5y = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + 6xy + y^2 + 4x = 0 \quad (3)$$

6. Quelle est l'image d'une hyperbole par une similitude du plan affine euclidien ? Deux hyperboles données peuvent-elles être image l'une de l'autre par une telle similitude ? Reprendre la question pour l'ellipse et la parabole.
7. Montrer que l'image d'une ellipse par une bijection affine du plan affine euclidien est une conique dont on précisera la nature géométrique.
8. Soit (H) une hyperbole équilatère et A, B et C trois points deux à deux distincts de H . Montrer que l'orthocentre du triangle ABC est sur H .
9. Soient a et b deux réels non nuls.
Montrer que la courbe paramétrée définie pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par

$$\begin{cases} x(t) = a \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ y(t) = b \frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$$

est une conique.

10. (D'après un problème de CAPES)

Dans tout le problème, \mathcal{P} désigne un plan affine euclidien orienté et $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère ortho-normé direct de \mathcal{P} .

1) Soit Γ une conique et S un point du plan \mathcal{P} . On se propose de définir la notion de puissance de S par rapport à Γ .

On suppose que Γ n'est pas un cercle. Soit e son excentricité, D son axe focal, c'est à dire l'axe de symétrie qui contient son (ou ses) foyer(s). Soit Δ une droite quelconque passant par S , munie d'un vecteur unitaire \vec{u} et θ une mesure de l'angle orienté du couple de droites (D, Δ) .

a) Montrer que Γ peut être définie par l'équation

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 + u_1x + u_2 = 0$$

u_1 et u_2 désignant des constantes réelles

b) On note (x_0, y_0) les coordonnées de S . Soit $M \in \Delta$ et $\lambda = \overline{SM}$. Exprimer les coordonnées x et y de M au moyen de x_0, y_0, θ et λ . En déduire que $M \in \Gamma$ si et seulement si λ est racine d'une équation de la forme

$$(1 - e^2 \cos^2(\theta))X^2 + \beta X + \gamma = 0$$

où β et γ sont deux réels que l'on exprimera au moyen de θ, x_0, y_0, e, u_1 et u_2

c) On suppose que Δ coupe Γ en deux points distincts A et B . Montrer que le réel p défini par

$$p = (1 - e^2 \cos^2(\theta))\overline{SA} \cdot \overline{SB}$$

ne dépend que de S et Γ et en donner une expression en fonction de x_0, y_0, e, u_1 et u_2 . Ce nombre p s'appelle la puissance du point S par rapport à la conique Γ et sera noté $\Gamma(S)$.

d) On suppose que Δ est tangente à Γ en un point M_0 . Montrer qu'alors $1 - e^2 \cos^2(\theta) \neq 0$ puis que $\Gamma(S) = (1 - e^2 \cos^2(\theta))SM_0^2$.

2) On considère maintenant Γ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $0 < b < a$. On pose $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. On note \mathbf{U} l'ensemble des complexes de module 1 et, à tout élément de \mathbf{U} , on associe un point $M(u) \in \mathcal{P}$ de coordonnées $x = a\Re(u), y = b\Im(u)$.

a) Montrer que $u \mapsto M(u)$ est une bijection de \mathbf{U} sur Γ .

b) \mathcal{C} désigne le cercle d'équation

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0.$$

Déterminer un polynôme $Q_c(X)$ de degré 4, à coefficients complexes, de coefficient dominant c^2 , dont les autres coefficients sont des polynômes en $a, b, \alpha, \beta, \gamma$ qu'on précisera, et qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall u \in \mathbf{U}, (M(u) \in \mathcal{C} \cap \Gamma \Leftrightarrow Q_c(u) = 0).$$

En supposant que $\mathcal{C} \cap \Gamma$ est un ensemble de quatre points distincts $M_j, j \in \{1, \dots, 4\}$, on pose $M_j = M(u_j), u_j \in \mathbf{U}$. Montrer que $u_1 u_2 u_3 u_4 = 1$. Montrer que cette dernière condition caractérise les points de Γ qui sont cocycliques.