UNIVERSITE D'ORLEANS **CAPES 2007-2008**
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES **E. Trélat**

Semaine 16 - Exercices sur les équations différentielles.

1. On considère le système différentiel linéaire

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & ax+by \\ y' & = & cx+dy \end{array} \right. ,$$

   où

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   est une matrice réelle. Représenter les différentes allures du portrait de phases au voisinage de $(0,0)$ selon les valeurs propres de A.
   (NB : le portrait de phases est la représentation des solutions $x(t), y(t)$ dans les coordonnées x, y seulement)

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que l'application $t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{tA} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \quad \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est bien définie, et est C^∞.
   (b) Montrer que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et tout $X_0 \in \mathbb{C}^n$, le problème de Cauchy $dX/dt = AX$, $X(t_0) = X_0$ admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}$, donnée par la formule $X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0$. Quelle est la forme générale d'une solution de $dX/dt = AX$?
   (c) Soit $B : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ une application continue. Montrer que le problème de Cauchy $dX/dt = A\,X + B(t)$, $X(t_0) = X_0$, admet une unique solution $X(t)$ définie sur $\mathbb{R}$, qui est donnée par la formule :

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} B(s)\, ds$$

   (*Indication :* On pourra appliquer la méthode de la variation de la constante).
   (d) Soit A une matrice carrée réelle d'ordre n dont les valeurs propres (dans $\mathbb{C}$) sont distinctes de $2ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Soit d'autre part $B\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une application continue et 1-périodique.
   Montrer que le système différentiel $X'(t) = AX(t) + B(t)$ admet une et une seule solution 1-périodique.
   (*Indication :* Chercher une condition nécessaire et suffisante sous la forme $(e^A - Id)X_0 = \ldots$).

3. Résoudre l'équation différentielle $x'''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = \sin t$.
   (*indication :* mettre cette équation sous forme d'un système différentiel d'ordre 1).

4. Résoudre le système différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'' & = & 2x - 3y, \\ y'' & = & x - 2y. \end{array} \right.$$

5. (a) Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite finie en $+\infty$. Donner les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$x'(t) + x(t) = f(t).$$

Montrer que toute solution admet une limite finie en $+\infty$.

(b) Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, monotone et ayant une limite finie en $+\infty$. Donner les solutions sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation différentielle

$$x''(t) + x(t) = f(t).$$

Montrer que toute solution est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Etablir qu'il existe une unique solution ayant une limite finie en $+\infty$.

6. *Méthode des entonnoirs.*
Soit $(E)\ : x'(t) = f(t, x(t))$ une équation différentielle, où $f\ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^1.
On dit que α (resp. β) est une *barrière inférieure* (resp. une *barrière supérieure*), si c'est une fonction de classe C^1 telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on ait $\alpha'(t) < f(t, \alpha(t))$ (resp. $\beta'(t) > f(t, \beta(t))$). On appelle *entonnoir* l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ /\ \alpha(t) < y < \beta(t)\}.$$

On veut montrer que si $t \mapsto x(t)$ est une solution de (E) sur un intervalle $J \subset \mathbb{R}$ telle que $x(t_0) = x_0$ avec $(t_0, x_0) \in \mathcal{E}$, alors $(t, x(t)) \in \mathcal{E}$ pour tout $t \geq t_0, t \in J$.

(a) Raisonner par l'absurde, et poser $t_1 = \inf\{t \geq t_0 \ /\ (t, x(t)) \notin \mathcal{E}\}$. Montrer que $x(t_1) = \alpha(t_1)$ ou $\beta(t_1)$.

(b) Conclure.

7. *Préliminaire :* Lemme de Gronwall discret
Soit $a > 0$ et soient $(\theta_n)_{0 \leq n \leq \mathbb{N}}$ et $(\alpha_n)_{0 \leq n \leq \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs vérifiant la relation

$$\theta_{n+1} \leq a\,\theta_n + \alpha_n, \qquad n = 0, \ldots, N-1. \tag{1}$$

1) Montrer par récurrence sur n que

$$\theta_n \leq a^n\,\theta_0 + \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-(i+1)}\alpha_i, \quad n = 1, \ldots, N. \tag{2}$$

2) On suppose que $a = 1 + Lh$, avec $L, h > 0$. Montrer que $1 + x \leq e^x$ pour tout $x \geq 0$. Déduire de la relation (2) :

$$\theta_n \leq e^{nLh}\,\theta_0 + \sum_{i=0}^{n-1} e^{\big(n-(i+1)\big)Lh}\,\alpha_i, \qquad n = 1, \ldots, N. \tag{3}$$

3) On pose $T = Nh$, et on suppose $\alpha_i = \alpha$ pour tout i. Montrer, en utilisant (3), que

$$\max\{\theta_n,\ 0 \leq n \leq N\} \leq e^{LT}\theta_0 + \frac{\alpha}{h}\,\frac{e^{LT}-1}{L}.$$

On considère maintenant le problème différentiel suivant :

(1) $$X'(t) = f(t, X(t)) , \quad t \in [t_0, t_0 + T] , \quad x(t_0) = X^0 ,$$

où $X^0 \in \mathbb{R}^d$ est donné. On suppose que $f \in C^1([t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ et vérifie la condition suivante :

(L) Il existe $L > 0$ tel que $\|d_Z f(t, Z)\| \leq L , \quad \forall Z \in \mathbb{R}^d , \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T]$.

On considère une subdivision uniforme à $N+1$ points (donc de pas $h = T/N$) de l'intervalle $[t_0, t_0+T]$, et à partir d'une donnée initiale $X_0 \in \mathbb{R}^d$ on construit une suite finie $(X_n , 0 \leq n \leq N)$ par le schéma d'Euler.
1) Soit X une solution de (1) sur $[t_0, t_0 + T]$. On note

$$M_2 = \max\{\|X''(t)\| ; t \in [t_0, t_0 + T]\}.$$

1.1) Pour tout $0 \leq n \leq N - 1$, on pose

$$\epsilon_n = X(t_{n+1}) - X(t_n) - hf(t_n, X(t_n)).$$

Montrer que

$$\|\epsilon_n\| \leq \frac{M_2}{2} h^2, \quad \forall\, 0 \leq n \leq N - 1.$$

1.2) On note $e_n = X(t_n) - X_n$ l'erreur au temps $t_n = t_0 + nh$. Etablir que

$$\|e_{n+1}\| \leq (1 + hL)\|e_n\| + \|\epsilon_n\| \quad \forall\, 0 \leq n \leq N - 1.$$

1.3) En déduire une majoration de $\|e_n\|$ en fonction de $\|X^0 - X_0\|, n, h$ et de M_2.

2) On considère la fonction $X^h : [t_0, t_0 + T] \to \mathbb{R}^d$ continue et affine par morceaux définie par

$$X^h(t_0) = X_0 , \quad X^h(t) = X_n + \frac{t - t_n}{h}(X_{n+1} - X_n) \quad \text{si } t \in [t_n, t_{n+1}] .$$

2.1) Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ indépendante de h telle que $\|X_n\| \leq K$ pour tout $0 \leq n \leq N$.
Montrer que $\|X^h(t)\| \leq K$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$. On note

$$L' = \max\{ \|\frac{\partial f}{\partial t}(t, Z)\|;\ t_0 \leq t \leq t_0 + T,\ \|Z\| \leq K\}\cdot$$

2.2) Montrer qu'il existe une constante $K_1 > 0$, indépendante de h, telle qu'on ait

$$\|(X^h)'(t) - f(t, X^h(t))\| \leq K_1 h, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T] \setminus \{t_0, \ldots, t_N\}.$$

2.3) En déduire qu'il existe une constante $K_2 > 0$, indépendante de h, telle que

$$\|X^h(t) - X(t)\| \leq e^{L(t-t_0)}\|X^0 - X_0\| + K_2\, h , \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T].$$

Indication : utiliser le lemme de Gronwall (version intégrale) sur chaque intervalle $[t_n, t_n + h]$, et la question 1.3).