UNIVERSITE D'ORLEANS **CAPES 2007-2008**
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES **E. Trélat**

Semaine 16 - Exercices sur les équations différentielles.

1. Etudier et tracer les solutions des équations différentielles
$$y' = xy^2, \quad y' = y^2, \quad y' = 1 + y^2, \quad y' + |y| = 1.$$

2. Soit (f, g) une base de solutions de l'équation différentielle homogène
$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t),$$
où p et q sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que les zéros de f sont isolés.
   (b) Prouver qu'entre deux zéros successifs de f, il y a un unique zéro de g (on considérera le wronskien $w(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$).

3. Soient r et s deux fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit f une solution non nulle de l'équation différentielle $y''(t) + r(t)y(t) = 0$, et g une solution non nulle de $y''(t) + s(t)y(t) = 0$. On suppose que $s(t) \geq r(t)$ pour tout $t \in I$.
   (a) Soient t_1 et t_2 deux zéros successifs de f. Montrer qu'il existe dans $]t_1, t_2[$ un zéro de g, sauf si f et g sont proportionnelles sur $]t_1, t_2[$ (on étudiera la monotonie de $w(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$).
   (b) i. Supposons que $r(t) \leq 0$, pour tout $t \in I$. Montrer que toute solution non nulle de $y''(t) + r(t)y(t) = 0$ a au plus un zéro dans I.
      ii. Soit $\mu > 0$; on suppose que $r(t) \leq \mu^2$, pour tout $t \in I$. Soient t_1 et t_2 deux zéros consécutifs d'une solution non nulle de $y''(t) + r(t)y(t) = 0$. Montrer que $t_2 \geq t_1 + \frac{\pi}{\mu}$.
      iii. Soit $\lambda > 0$; on suppose que $r(t) \geq \lambda^2$, pour tout $t \in I$. Soit $t_1 \in I$ tel que $t_1 + \frac{\pi}{\lambda} \in I$. Montrer que toute solution de $y''(t) + r(t)y(t) = 0$ a au moins un zéro dans $]t_1, t_1 + \frac{\pi}{\lambda}[$.

4. On considère le système différentiel linéaire
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & ax + by \\ y' & = & cx + dy \end{array} \right. ,$$
où
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
est une matrice réelle. Représenter les différentes allures du portrait de phases au voisinage de $(0, 0)$ selon les valeurs propres de A.
(NB : le portrait de phases est la représentation des solutions $x(t), y(t)$ dans les coordonnées x, y seulement)

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   (a) Montrer que l'application $t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{tA} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \quad \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est bien définie, et est C^∞.

   (b) Montrer que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et tout $X_0 \in \mathbb{C}^n$, le problème de Cauchy $dX/dt = AX$, $X(t_0) = X_0$ admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}$, donnée par la formule $X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0$. Quelle est la forme générale d'une solution de $dX/dt = AX$?

   (c) Soit $B : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ une application continue. Montrer que le problème de Cauchy $dX/dt = A\,X + B(t)$, $X(t_0) = X_0$, admet une unique solution $X(t)$ définie sur $\mathbb{R}$, qui est donnée par la formule :

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} B(s)\, ds$$

   (*Indication :* On pourra appliquer la méthode de la variation de la constante).

   (d) Soit A une matrice carrée réelle d'ordre n dont les valeurs propres (dans $\mathbb{C}$) sont distinctes de $2ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Soit d'autre part $B\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une application continue et 1-périodique.
   Montrer que le système différentiel $X'(t) = AX(t) + B(t)$ admet une et une seule solution 1-périodique.
   (*Indication :* Chercher une condition nécessaire et suffisante sous la forme $(e^A - Id)X_0 = \ldots$).

6. *Préliminaire :* Lemme de Gronwall discret
   Soit $a > 0$ et soient $(\theta_n)_{0 \le n \le \mathbb{N}}$ et $(\alpha_n)_{0 \le n \le \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs vérifiant la relation

$$\theta_{n+1} \le a\, \theta_n + \alpha_n, \qquad n = 0, \ldots, N-1. \tag{1}$$

   1) Montrer par récurrence sur n que

$$\theta_n \le a^n\, \theta_0 + \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-(i+1)} \alpha_i, \quad n = 1, \ldots, N. \tag{2}$$

   2) On suppose que $a = 1 + Lh$, avec $L, h > 0$. Montrer que $1 + x \le e^x$ pour tout $x \ge 0$. Déduire de la relation (2) :

$$\theta_n \le e^{nLh}\, \theta_0 + \sum_{i=0}^{n-1} e^{\left(n-(i+1)\right)Lh}\, \alpha_i, \qquad n = 1, \ldots, N. \tag{3}$$

   3) On pose $T = Nh$, et on suppose $\alpha_i = \alpha$ pour tout i. Montrer, en utilisant (3), que

$$\max\{\theta_n,\ 0 \le n \le N\} \le e^{LT}\theta_0 + \frac{\alpha}{h}\, \frac{e^{LT} - 1}{L}.$$

   On considère maintenant le problème différentiel suivant :

$$(1) \qquad X'(t) \;=\; f(t, X(t))\ , \quad t \in [t_0, t_0 + T]\ , \quad x(t_0) = X^0\ ,$$

   où $X^0 \in \mathbb{R}^d$ est donné. On suppose que $f \in C^1([t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ et vérifie la condition suivante :

$$(L) \qquad \text{Il existe } L > 0 \text{ tel que } \|d_Z f(t, Z)\| \;\le\; L\ , \quad \forall\, Z \in \mathbb{R}^d\ , \quad \forall\, t \in [t_0, t_0 + T]\ .$$

On considère une subdivision uniforme à $N+1$ points (donc de pas $h = T/N$) de l'intervalle $[t_0, t_0+T]$, et à partir d'une donnée initiale $X_0 \in \mathbb{R}^d$ on construit une suite finie $(X_n\,,\, 0 \leq n \leq N)$ par le schéma d'Euler.
1) Soit X une solution de (1) sur $[t_0, t_0 + T]$. On note

$$M_2 = \max\{\|X''(t)\|\,;\, t \in [t_0, t_0 + T]\}.$$

1.1) Pour tout $0 \leq n \leq N-1$, on pose

$$\epsilon_n = X(t_{n+1}) - X(t_n) - hf(t_n, X(t_n)).$$

Montrer que

$$\|\epsilon_n\| \leq \frac{M_2}{2}\, h^2, \quad \forall\, 0 \leq n \leq N-1.$$

1.2) On note $e_n = X(t_n) - X_n$ l'erreur au temps $t_n = t_0 + nh$. Etablir que

$$\|e_{n+1}\| \leq (1 + hL)\|e_n\| + \|\epsilon_n\| \quad \forall\, 0 \leq n \leq N-1.$$

1.3) En déduire une majoration de $\|e_n\|$ en fonction de $\|X^0 - X_0\|, n, h$ et de M_2.

2) On considère la fonction $X^h : [t_0, t_0 + T] \to \mathbb{R}^d$ continue et affine par morceaux définie par

$$X^h(t_0) \;=\; X_0 \;, \quad X^h(t) \;=\; X_n + \frac{t - t_n}{h}(X_{n+1} - X_n) \quad \text{si } t \in [t_n, t_{n+1}]\;.$$

2.1) Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ indépendante de h telle que $\|X_n\| \leq K$ pour tout $0 \leq n \leq N$.
Montrer que $\|X^h(t)\| \leq K$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$. On note

$$L' = \max\{\, \|\frac{\partial f}{\partial t}(t, Z)\|;\; t_0 \leq t \leq t_0 + T,\; \|Z\| \leq K\}\cdot$$

2.2) Montrer qu'il existe une constante $K_1 > 0$, indépendante de h, telle qu'on ait

$$\|(X^h)'(t) - f(t, X^h(t))\| \leq K_1 h, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T] \setminus \{t_0, \ldots, t_N\}.$$

2.3) En déduire qu'il existe une constante $K_2 > 0$, indépendante de h, telle que

$$\|X^h(t) - X(t)\| \;\leq\; e^{L(t-t_0)}\|X^0 - X_0\| + K_2\; h\;, \quad \forall\, t \in [t_0, t_0 + T].$$

Indication : utiliser le lemme de Gronwall (version intégrale) sur chaque intervalle $[t_n, t_n + h]$, et la question 1.3).