UNIVERSITE D'ORLEANS **CAPES 2007-2008**
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES **E. Trélat**

Semaine 5 - Espaces affines.

1. Soit E un espace affine et $f : E \to E$ affine. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un sous-espace affine de E.

2. Soient E et F deux droites affines réelles. Caractériser les applications affines de E dans F et, parmi celles-ci, celles qui sont bijectives.

3. Soit E espace affine de dimension trois et $\phi : E \to \mathbb{R}$ une forme affine. Caractériser $\phi^{-1}(a)$ où $a \in \mathbb{R}$.

4. **Projections.**
   (a) (point de vue vectoriel) Soit $\vec{E}$ espace vectoriel et $\vec{p}$ un endomorphisme de $\vec{E}$. Montrer que $\vec{p} \circ \vec{p} = \vec{p}$ si et seulement si $\vec{E} = \ker \vec{p} \oplus \ker(\vec{p} - \mathrm{Id})$. Montrer alors que $\ker(\vec{p} - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}\, \vec{p}$. On dit que $\vec{p}$ est un projecteur sur $\mathrm{Im}\, \vec{p}$ parallèlement à $\ker \vec{p}$.

   Soit E espace affine de direction $\vec{E}$. Soient $\vec{F}$ et $\vec{G}$ deux sous-espaces vectoriels non triviaux supplémentaires de $\vec{E}$.

   (b) Montrer que, pour tous $A, B \in E$, les sous-espaces affines $A + \vec{F}$ et $B + \vec{G}$ ont une intersection non vide, réduite à un point.

   Soit O un point fixé de E. On pose $F = O + \vec{F}$. On définit l'application $p : E \to E$ par $\{p(M)\} = F \cap (M + \vec{G})$, appelée projection sur F parallèlement à la direction $\vec{G}$. On se propose de montrer que p est une application affine.

   (c) Pour tout $\vec{x} \in \vec{E}$, soient $A, B \in E$ tels que $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{p(A)p(B)}$ ne dépend pas du choix du couple (A, B) tel que $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$. On définit alors l'application $\vec{p} : \vec{E} \to \vec{F}$ par $\vec{p}(\vec{x}) = \overrightarrow{p(A)p(B)}$.

   (d) Montrer que $\vec{p}$ est linéaire.
   Indication : pour montrer que $\vec{p}(\lambda\vec{x}) = \lambda\vec{p}(\vec{x})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $\vec{x} \in \vec{E}$, on démontrera le théorème de Thalès :

   > Soient D et D' deux droites affines du plan affine, sécantes en O. Soient A et B (resp. A' et B') deux points de $D \setminus \{O\}$ (resp. de $D' \setminus \{O\}$) : il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}^*$ (resp. $\lambda' \in \mathbb{R}^*$) tel que $\overrightarrow{OB} = \lambda\overrightarrow{OA}$ (resp. $\overrightarrow{OB'} = \lambda'\overrightarrow{OA'}$). Alors : $\lambda = \lambda'$ si et seulement si les droites (AA') et (BB') sont parallèles ; on a alors de plus $\overrightarrow{BB'} = \lambda\overrightarrow{AA'}$.

   (e) Déterminer $\ker \vec{p}$ et $\mathrm{Im}\, \vec{p}$.

   (f) Montrer que $p \circ p = p$ et que $\vec{p} \circ \vec{p} = \vec{p}$.

5. Soit E espace affine de direction $\vec{E}$, $p : E \to E$ une application affine et $\vec{p} = \vec{E} \to \vec{E}$ son application linéaire associée. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $p \circ p = p$;
(ii) p a un point fixe et $\vec{p} \circ \vec{p} = \vec{p}$;
(ii) il existe deux sous-espaces affines F et G supplémentaires de E tels que p soit la projection sur F parallèlement à $\vec{G}$.

6. **Symétries.**
   (a) (point de vue vectoriel) Soit E un espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces supplémentaires de E, non triviaux. Tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$, et on pose alors $s(x) = u - v$. L'application $s : E \to E$ ainsi définie est appelée symétrie par rapport à F, parallèlement à G.
      i. Montrer que s est linéaire.
      ii. Soit p la projection sur F parallèlement à G. Montrer que $s = 2p - Id_E$. Réciproque ?
      iii. Quels sont les éléments de E invariants par s ? Caractériser les sous-espaces F et G à l'aide de s.
      iv. Montrer que $s \circ s = Id_E$. Réciproque ?
      v. Lorsque E est de dimension finie, montrer que s est diagonalisable, et préciser les valeurs propres.

   (b) (point de vue affine) Soit E espace affine de direction $\vec{E}$, soient F et G deux sous-espaces affines non triviaux supplémentaires, et p la projection sur F parallèlement à $\vec{G}$. On appelle symétrie affine de base F et de direction $\vec{G}$ l'application $s : E \to E$ définie par $s(M) = M + 2\overrightarrow{Mp(M)}$, pour tout $M \in E$. Montrer que s est affine, et préciser son application linéaire $\vec{s}$ associée.

7. Dans le plan affine réel, on considère quatre points A, B, C, D non alignés et distincts deux à deux. A quelle condition existe-t-il une application affine du plan telle que $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = D$, $f(D) = A$?

   Indication : Montrer que, sous cette condition, on a $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{BC}$, $\vec{f}(\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{CD}$, $\vec{f}(\overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{DA}$, $\vec{f}(\overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{AB}$. Ensuite, en raisonnant dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$, et en posant $\overrightarrow{CD} = \lambda\overrightarrow{AB}) + \mu\overrightarrow{BC}$, déduire des deux conditions restantes un système en λ et μ. Résoudre ce système et montrer que la seule possibilité est que ABCD soit un parallèlogramme (i.e., $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$).