Exercices de géométrie.

---

1 - a) Montrer, sur un exemple simple (par exemple deux points A, B et leur milieu I), que si M est barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$ et barycentre de $(A, \alpha'), (B, \beta'), (C, \gamma')$, les coefficients ne sont pas à priori proportionnels.
b) Montrer que, dans l'espace affine réel $\mathcal{A}$ de dimension n, si $(A_i)_{0 \leq i \leq n}$ est un repère affine, alors les représentations de M comme barycentre des A_i sont proportionnelles.
Un système $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq n}$ tel que M soit barycentre de $((A_i, \alpha_i))_{0 \leq i \leq n}$ est appelé un système de coordonnées barycentriques de M.

2 - 1) Soient A, B, C trois points non alignés du plan, M_1, M_2, M_3 trois points du plan de coordonnées barycentriques respectives $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ relativement à (A, B, C). Montrer que M_1, M_2, M_3 sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

2) Soit A' le barycentre de $(B, \beta), (C, \gamma)$, B' le barycentre de $(C, \gamma'), (A, \alpha')$, et C' celui de $(A, \alpha''), (B, \beta'')$. Montrer que A', B', C' sont alignés si et seulement si $\alpha'\beta''\gamma + \alpha''\beta\gamma' = 0$.
3) a) En déduire le *théorème de Ménélaüs :* si A', B', C' sont des points tels que $A' \in (BC)$ et $A' \neq C$, $B' \in (CA)$ et $B' \neq A$, $C' \in (AB)$ et $C' \neq B$, montrer que A', B', C' sont alignés si et seulement si :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$

b) Si les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes en G, montrer que (*théorème de Gergonne*)

$$\frac{\overline{A'G}}{\overline{A'A}} + \frac{\overline{B'G}}{\overline{B'B}} + \frac{\overline{C'G}}{\overline{C'C}} = 1$$

Montrer aussi : $\frac{\overline{AG}}{\overline{AA'}} + \frac{\overline{BG}}{\overline{BB'}} + \frac{\overline{CG}}{\overline{CC'}} = 2$ et $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} + \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} = \frac{\overline{GA}}{\overline{GA'}}$.

3 - *Equation barycentrique d'une droite du plan.*
Soit A, B, C trois points non alignés du plan. Soit Δ une droite du plan, montrer qu'il existe des réels a, b, c non tous égaux tels que pour tout point M du plan de coordonnées barycentriques (x, y, z), on a

$$M \in \Delta \Longleftrightarrow ax + by + cz = 0$$

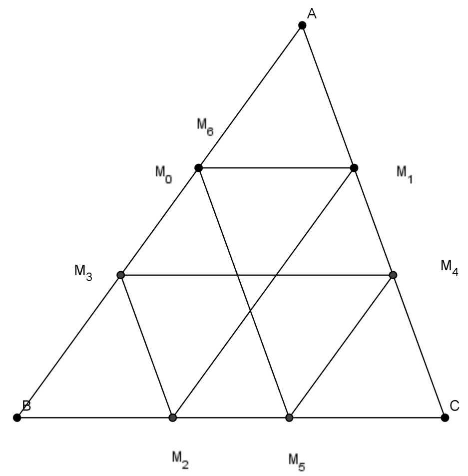
Réciproquement, montrer que si a, b, c sont des réels non tous égaux, l'ensemble des points M du plan dont un système de coordonnées barycentriques (x, y, z) vérifie l'équation $ax + by + cz = 0$ est une droite.

4 - Soient A et B deux points distints et G le barycentre du système $(A, \alpha), (B\beta)$ (avec $\alpha + \beta \neq 0$). Comment choisir α' et β' pour que $(A, \alpha'), (B, \beta')$ ait un barycentre G' symétrique de G par rapport au milieu I de $[AB]$?

5 - Soit ABC un triangle équilatéral dans le plan affine euclidien. On désigne par H le projeté orthogonal du milieu I de $[BC]$ sur (AB).
a) Montrer que H est le barycentre du système de points pondérés $((A, 1), (B, 3))$.
b) Montrer que le milieu G de $[IH]$ est le barycentre de $(A, 1), (B, 5), (C, 2)$.

6 - Soit $ABCD$ un quadrilatère du plan. Soient G le centre de gravité du triangle ABD, H le centre de gravité du triangle CBD, K le milieu de $[GH]$, I le milieu de $[AC]$, et J le milieu de $[BD]$.
1) Montrer que K est le barycentre de $((A, 1), (B, 1), (D, 1), (C, 1), (B, 1), (D, 1))$.
2) En déduire que K est le barycentre de $((A, 1), (B, 2), (C, 1), (D, 2))$.
3) Montrer que I, J, K sont alignés et exprimer $\overrightarrow{IK}$ en fonction de $\overrightarrow{IJ}$.
4) Soit E le centre de gravité du triangle ABC, F le centre de gravité du triangle DAC, et L le milieu de $[EF]$. Montrer que I, J, K, L sont alignés.

7 - Soit ABC un triangle non aplati du plan affine réel, et soit $M_0 \in [AB]$. On construit les points $(M_i)_{1 \leq i \leq 6}$ de la façon suivante :



$(M_0M_1) \parallel (BC)$ et $M_1 \in (AC)$, $(M_1M_2) \parallel (AB)$ et $M_2 \in (BC)$
$(M_2M_3) \parallel (AC)$ et $M_3 \in (AB)$, $(M_3M_4) \parallel (BC)$ et $M_4 \in (AC)$
$(M_4M_5) \parallel (AB)$ et $M_5 \in (BC)$, $(M_5M_6) \parallel (AC)$ et $M_6 \in (AB)$.

Montrer que $M_0 = M_6$.

8 - Soit G un groupe fini de transformations affines d'un espace affine réel, montrer qu'il existe un point O laissé fixe par tous les éléments de G.

9 - Dans le plan affine on donne un parallèlogramme non plat $ABCD$. Montrer qu'on peut construire à la règle seule le milieu d'un segment $[PQ]$.

10 - Soit A un point et Δ une droite du plan. Lieu du milieu I de $[MA]$ lorsque M décrit la droite Δ ? Lorsque M décrit un cercle donné Γ ?

11 - Soit $ABCD$ et $MNPQ$ des parallèlogrammes tels que M, N, P, Q appartiennent respectivement aux droites (AB), (BC), (CD), (DA). Montrer qu'ils ont le même centre.

12 - Soit D_1 et D_2 des droites sécantes du plan, M un point non situé sur $D_1 \cup D_2$. construire P sur D_1 et Q sur D_2 tels que M soit le milieu de $[PQ]$.

13 - Soit ABC un triangle non aplati d'un plan affine, I, J, K les milieux des côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, M un point du plan, et A', B', C' les symétriques de M respectivement par rapport à I, J, K. En considérant la composée de deux homothéties, l'une de centre M, et l'autre de centre G (centre de gravité du triangle ABC), montrer que les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes.

14 - Etant donné un triangle ABC, construire trois points A', B', C' tels que B' soit milieu de $[AC']$, C' celui de $[BA']$, et A' celui de $[CB']$ (deux méthodes : barycentres et homothéties).

15 - Soit deux cercles du plan de centres O et O' ($O \neq O'$), de rayons R et R' ($R \neq R'$). Montrer qu'il existe deux homothéties transformant le cercle $\mathcal{C}(O, R)$ en $\mathcal{C}(O', R')$ et donner une construction de leurs centres.

16 - Construire un cercle tangent à deux droites concourantes et passant par un point donné.