UNIVERSITE D'ORLEANS **CAPES 2007-2008**
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES **E. Trélat**

Semaine 19 - Exercices d'analyse.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2} \cos tx \, dt$.
   (a) Etablir une équation différentielle simple vérifiée par F.
   (b) En admettant que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, en déduire que $F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x^2/2}$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in]0, +\infty[$, on pose
$$f(t, x) = \frac{1 - \cos tx}{t^2} \mathrm{e}^{-t}.$$
   (a) Montrer que la fonction $g(x) = \int_0^{+\infty} f(t, x) dt$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, et calculer $g''(x)$.
   (c) En déduire que
$$g(x) = x \mathrm{Arctan}\, x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2).$$

3. On considère la fonction g définie pour tout $(x, t) \neq (0, 0)$ par
$$g(x, t) = \frac{x}{x^2 + t^2} e^{it}$$
et la fonction f définie par
$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + t^2} e^{it} dt.$$
   (a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
   (b) Montrer que la fonction g vérifie, en un point $(x_0, t_0) \neq (0, 0)$,
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_0, t_0) + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(x_0, t_0) = g(x_0, t_0) + 2i \frac{\partial g}{\partial t}(t_0, x_0).$$
   (c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (d) Montrer que la fonction f est solution de l'équation différentielle
$$y'' - y = 0.$$
   (e) Montrer que, pour tout $x > 0$,
$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iux}}{1 + u^2} du.$$
   (f) Montrer que $\lim_{x \to 0+} f(x) = \pi$.
   (g) Calculer l'expression de f.

4. Le but de l'exercice est de déterminer la solution de l'équation différentielle

   $(E) \qquad y''(x) + y(x) = |\sin x|,$

   vérifiant les conditions (IC) : $y(0) = 0, y'(0) = 1$.
   (a) Développer en série de Fourier la fonction $x \mapsto |\sin x|$.
   (b) Chercher une solution particulière paire $g(x)$ de (E) sous la forme d'une série de Fourier.
   (c) i. Justifier que la solution de (E) vérifiant (IC) s'écrit :
   $$y(x) = -g(0)\cos x - g'(0)\sin x + g(x).$$
   ii. Que vaut $g'(0)$?
   iii. Calculer $g(0)$ (on pourra considérer le développement en série de Fourier de la fonction $x \mapsto |x|$).
   iv. Conclure.

5. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continues et 2π-périodiques.
   (a) Soient $f, g \in \mathcal{C}$. On définit le produit de convolution $h = f * g$ de f et g par
   $$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt.$$
   i. Montrer que $h \in \mathcal{C}$.
   ii. Calculer les coefficients de Fourier $a_n(h)$ et $b_n(h)$ de h, en fonction de ceux de f et g.
   iii. En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$c_n(h) = \frac{1}{2}(a_n(h) - ib_n(h)),\ c_{-n}(h) = \frac{1}{2}(a_n(h) + ib_n(h)),\ c_0(h) = a_0(h),$$
   (de même pour f et g), montrer que $c_n(h) = c_n(f)c_n(g)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
   (b) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, égale à $t \mapsto t^2$ sur $[-\pi, \pi]$.
   i. Calculer les coefficients $c_n(g)$, pour $n \in \mathbb{Z}$.
   ii. Soit $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ l'application définie par $\Phi(f) = f * g$. Justifier que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{C}$, puis calculer les valeurs propres et vecteurs propres de Φ.

6. On considère la fonction f, 2π-périodique, paire, dont la restriction à l'intervalle $[0, \pi]$ est définie par $f(x) = x^4$.
   (a) f est-elle développable en série de Fourier ?
   (b) En exploitant toutes les hypothèses de l'énoncé afin de limiter les calculs, calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.
   (c) En introduisant la fonction g, 2π-périodique, paire, dont la restriction à l'intervalle $[0, \pi]$ est définie par $g(x) = x^2$, donner une relation entre les coefficients de Fourier trigonométriques de f et ceux de g.
   (d) En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8}$.

7. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \max(\sin x, 0)$.
   (a) Représenter le graphe de la fonction f.
   (b) Calculer les coefficients de Fourier de f.
   (c) En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.