Homothéties, translations (II).

1 - Etudier le produit de deux homothéties, puis d'une homothétie et d'une translation par calcul direct. (Donner les éléments géométriques caractéristiques des composés en fonction des éléments géométriques caractéristiques des données).

2 - Dans un espace affine $\mathcal{E}$, soit h et h' deux homothéties distinctes de l'identité. Montrer que si h et h' commutent, alors elles ont même centre.

3 - Soit h une homothétie et f une transformation affine, quelle est la nature de l'application $f \circ h \circ f^{-1}$?

4 - Dans un espace affine $\mathcal{E}$, que peut-on dire d'un sous-groupe de transformations affines constitué d'homothéties ?

5 - Montrer que tout sous-groupe commutatif du groupe des homothéties-translations d'un espace affine est un sous-groupe de translations ou bien sous-groupe d'homothéties de même centre.

6 - Soit A une partie non vide d'un espace affine. Montrer que si A possède un centre de symétrie, elle en possède une infinité et que ces centres de symétrie sont alignés. En déduire qu'il existe une droite coupant A en une infinité de points.

7 - Soit $ABCD$ un quadrilatère. La parallèle à (BC) en A coupe (BD) en I, et la parallèle à (AD) en B coupe (AC) en J. Montrer que (IJ) est parallèle à (CD).

8 - *Théorème de Pappus.* Soit Δ et Δ' deux droites distinctes d'un plan affine, A, B, C trois points distincts sur Δ et A', B', C' trois points distincts sur Δ' (distincts de l'éventuel point d'intersection de Δ et Δ'). Montrer que si (AB') est parallèle à (BA') et (BC') parallèle à (CB'), alors (CA') est parallèle à (AC').

9 - Soit ABC un vrai triangle, A', B', C' des points situés respectivement sur les droites (BC), (CA), (AB) et distincts respectivement de C, A, B.
a) *Théorème de Ménélaüs.*
Montrer que A', B', C' sont alignés si et seulement si

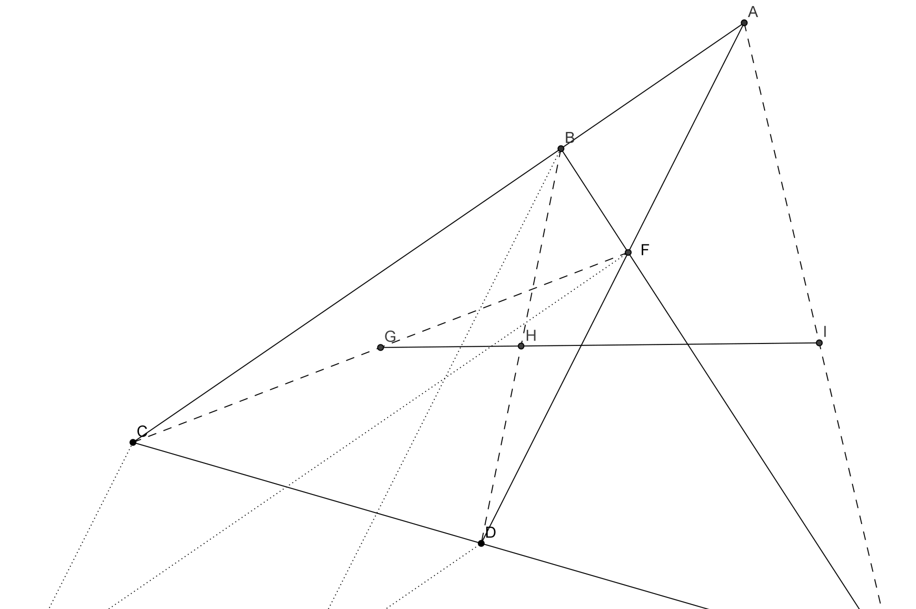
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1 \, .$$

b) *Théorème de Ceva.*
Montrer que les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1 \ .$$

10 - Soit ABC un triangle non aplati d'un plan affine, I, J, K les milieux des côtés $[BC], [CA], [AB]$, M un point du plan, et A', B', C' les symétriques de M respctivement par rapport à I, J, K. En considérant la composée de deux homothéties, l'une de centre M, et l'autre de centre G (centre de gravité du triangle ABC), montrer que les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes.

11 - Dans un plan affine on considère les points A, B, C, D, E, F, sommets d'un quadrilatère complet (points d'intersection de quatre droites sécantes deux à deux), et les points G, H, I milieux respectifs des segments $[CF]$, $[BD]$, $[AE]$ (diagonales du quadrilatère complet $ABCDE$). Soit D' le quatrième sommet du parallèlogramme $ABD'D$, et C' le quatrième sommet du parallèlogramme $ACC'F$.



On désigne par h_1 l'homothétie de centre E et de rapport $\frac{\overline{EB}}{\overline{EF}}$, par h_2 l'homothétie de centre E et de rapport $\frac{\overline{ED}}{\overline{EC}}$, et par $h = h_1 \circ h_2$ leur composée. Montrer que $h(C') = D'$. En déduire que C', D', E sont alignés, puis que les points G, H, I sont alignés.
(Les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont alignés).

12 - Etant donné un triangle ABC, construire trois points A', B', C' tels que B' soit milieu de $[AC']$, C' celui de $[BA']$, et A' celui de $[CB']$.