

- (1) Soit  $E$  un espace vectoriel et  $F_1, \dots, F_n, G_1, \dots, G_n$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ . On suppose que les  $F_1, \dots, F_n$  sont en somme directe et que pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $G_i \subset F_i$ . Montrer que les  $G_i$  sont en somme directe.
- (2) Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels et soit  $f \in \mathcal{L}(F, E)$ . On définit  $\Phi : E \times F \rightarrow E \times F$  par  $\phi(x, y) = (x + f(y), y)$  pour tout  $x \in E$ , tout  $y \in F$ . Montrer que  $\Phi$  est un automorphisme de  $E \times F$ .
- (3) Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs de  $E$ .
  - (a) Montrer que si  $p \neq 0$ ,  $q \neq 0$  et  $p \neq q$  alors  $(p, q)$  est libre dans  $\mathcal{L}(E)$ .
  - (b) Montrer que si  $p \circ q = q \circ p$  et  $\text{Ker}(p) = \text{Ker}(q)$  alors  $p = q$ .
  - (c) Montrer que  $p + q$  est un projecteur si et seulement si  $p \circ q = q \circ p = 0$ .
- (4) Soit  $H$  un sous -espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.
  - (a)  $H$  est le noyau d'une forme linéaire non nulle.
  - (b) Il existe  $a \in E$  non nul tel que  $E = H \oplus \mathbb{R}a$
 Si l'une de ces propriétés est vérifiée, on dit que  $H$  est un hyperplan. Quelle est la dimension d'un hyperplan?
- (5) Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que, dans les cas suivants,  $f$  est une homothétie.
  - (a)  $f$  laisse stable toute droite de  $E$ .
  - (b)  $\dim(E) \geq 2$  et  $f$  laisse stable tout sous-espace de  $E$  de dimension  $p$  avec  $1 \leq p \leq \dim(E)$ .
  - (c)  $f$  laisse stable tout hyperplan de  $E$ .
- (6) Soit  $s : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$  l'application définie par  $s(P) = P(1 - X)$ .
  - (a) Montrer que  $s$  est une symétrie.
  - (b) Montrer que  $P \in \ker(s - id)$  si et seulement si  $P(\frac{1}{2} + X) = P(\frac{1}{2} - X)$  et en déduire une caractérisation des éléments de  $\ker(s - id)$ .
  - (c) Donner une caractérisation de  $\ker(s + id)$ .
  - (d) Donner la matrice de  $s$  dans la base canonique.
  - (e) Donner une base de  $\mathbb{R}_n[X]$  adaptée à la décomposition de  $\mathbb{R}_n[X]$  en somme directe de  $\ker(s - id)$  et  $\ker(s + id)$ .
- (7) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_0, \dots, a_n$ ,  $n$  réels distincts deux à deux. On considère l'application  $\varphi$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  définie par  $\varphi(P) = (P(a_0), \dots, P(a_n))$ .
  - (a) Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
  - (b) Déterminer l'image par  $\varphi^{-1}$  de la base canonique de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . On notera  $L_i = \varphi^{-1}(e_i)$  où  $e_i$  est le  $i$ -ième vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Justifier pourquoi  $(L_i)_{i=0, \dots, n}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
  - (c) En déduire que pour tout  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$  tel que pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ ,  $P(a_i) = \alpha_i$ . Expliciter ce polynôme dans la base  $(L_i)_{i=0, \dots, n}$ .
  - (d) *Application* : déterminer l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à 2 tel que  $P(-1) = 1$ ,  $P(1) = -5$  et  $P(2) = \sqrt{2}$ .
- (8) Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ . Rappeler la base canonique de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ . Quelles sont les matrices de  $L_A : B \mapsto AB$  et  $R_A : B \mapsto BA$  dans cette base ? Même question pour une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  (on se contentera de décrire le résultat).
- (9) On note  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  l'espace vectoriel des suites réelles.  
 Soit  $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+3} + u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n = 0\}$ .
  - (a) Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

- (b) Soit  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application qui à une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  associe le triplet  $(u_0, u_1, u_2)$ .  
Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire la dimension de  $E$ .
- (c) Déterminer toutes les suites géométriques appartenant à  $E$ . En déduire une base de  $E$ .
- (d) Déterminer l'élément  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $E$  satisfaisant  $u_0 = 0$  et  $u_1 = u_2 = 1$ .
- (e) Soit  $F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \mid u_0 = 0\}$ . Vérifier que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et en donner une base.
- (10) Soit  $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$  et  $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \deg P \leq 1\}$ .
- (a) Montrer que  $\mathbb{R}_3[X] = F \oplus G$ .
- (b) Donner une méthode pour trouver la décomposition de tout polynôme  $P \in \mathbb{R}_3[X]$  suivant cette somme directe.
- (11) On considère les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ :
- $$E_1 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+3} - 6x_n = 2x_{n+2} + x_{n+1}\},$$
- $$E_2 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} - 3x_n = 0\},$$
- $$E_3 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} + x_{n+1} + 2x_n = 0\}.$$
- (a) Quelles sont leurs dimensions?
- (b) Montrer que  $E_1 = E_2 \oplus E_3$ .
- (12) Soit  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .
- (a) On considère les sous-espaces vectoriels suivants de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  :  $U = \text{Vect}(1, \cos 2x, \cos 4x)$ ,  
 $V = \text{Vect}(1, \cos^2 x)$  et  $W = \text{Vect}(\cos^4 x)$ . Montrer que  $U = V \oplus W$ .
- (b) Soit  $P = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ paire}\}$  et  $I = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ impaire}\}$ . Montrer que  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = P \oplus I$ .
- (13) Soit  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$  et  $F = \text{Vect}(1, 1, 2)$ .
- (a) Donner une base de  $E$ .
- (b) Montrer que  $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$ .
- (c) Donner la matrice dans la base canonique de la projection sur  $E$  parallèlement à  $F$ .
- (d) Donner la matrice dans la base canonique de la symétrie par rapport à  $E$  parallèlement à  $F$ .