UNIVERSITE D'ORLEANS **CAPES 2006-2007**
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES **S. Grellier**

Semaine 5 - Linéarité - Matrices.

(1) Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ si l'on veut...) et soit p un endomorphisme de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:
  (a) $p^2 = p$ ($p^2 = p \circ p$).
  (b) $E = Ker(p) \oplus Im(p)$ et $\forall x \in Im(p)$, $p(x) = x$.
  La première propriété est algèbrique, l'objet est alors appelé un *projecteur*; la seconde propriété est géométrique et p est appelé la *projection sur $Im(p)$ parallélement à $Ker(p)$*.
  (a) Montrer que p est un projecteur si et seulement si $(I - p)$ est un projecteur.
  (b) Déterminer, en dimension finie, la matrice de p, un projecteur, dans une base bien choisie.
  (c) Donner un exemple d'endomorphisme f de E qui n'est pas un projecteur et pour lequel $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.

(2) Soit E un K-espace vectoriel ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Un endomorphisme de E est appelé symétrie σ s'il existe deux sous espaces supplémentaires de E, E_1 et E_2, tels que σ soit la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 (autrement dit tout x de E s'écrit (de manière unique) $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ et $\sigma(x) = x_1 - x_2$).
  (a) Soit σ un endomorphisme de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:
    (i) σ est une symétrie.
    (ii) $\sigma^2 = I$ (on dit que σ est une involution).
    (iii) $\sigma = p_1 - p_2$, où p_1 et p_2 sont des projecteurs sur deux sous espaces vectoriels supplémentaires.
  (b) Montrer que si σ est une symétrie, $E = Ker(\sigma - I) \oplus Ker(\sigma + I)$.
  (c) Si E est de dimension finie et σ est une symétrie, donner la matrice de σ dans une base bien choisie.

(3) Soit E le sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, engendré par les fonctions f_1, f_2, f_3 où $f_1 : t \mapsto 1$, $f_2 : t \mapsto Sh(t)$, $f_3 : t \mapsto Ch(t)$.
  (a) Vérifier que (f_1, f_2, f_3) est une base de E.
  (b) soit $\varphi : E \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définie par $\varphi(f) = g$, où $g(t) = f(t) + f(-t)$, $t \in \mathbb{R}$. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
  (c) Quelle est la matrice de φ dans la base (f_1, f_2, f_3)? Déterminer une base de $Ker(\varphi)$ et une base de $Im(\varphi)$.

(4) *Pour s'entraîner...* Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{C}^3$ muni de la base canonique, on donne les vecteurs

$$V_1 = (1, 0, 2),\ V_2 = (1, 1, 2),\ V_3 = (2, 1, 5), .$$

  (a) Vérifier que $\mathcal{B}' = (V_1, V_2, V_3)$ est une base de E. Ecrire la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) = x'_1 V_1 + x'_2 V_2 + x'_3 V_3$. Calculer les coordonnées x_1, x_2, x_3 en fonction des coordonnées x'_1, x'_2, x'_3.
  (b) Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

(5) Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont l'expression dans la base canonique est $f(x, y, z) = (-x + y + z, -2x + y + z, -6x + 2y + z)$ pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$. On note A la matrice de f dans la base canonique. On note $V_1 = (1, 0, 2)$, $V_2 = (1, 1, 2)$ et $V_3 = (2, 1, 5)$. Après avoir montré que cette famille forme une base de $\mathbb{R}^3$, déterminer la matrice de f dans cette nouvelle base à partir de la matrice A.

(6) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n le $\mathbb{C}$-espace vectoriel constitué du polynôme nul et des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n. Soit $f \in \mathcal{L}(E_3, E_2)$ définie par $f(P) = P' - P''$ pour $P \in E_3$.
  (a) Déterminer la matrice A de f dans les bases canoniques de E_3 et E_2.
  (b) Soit $S \in \mathbb{C}[X]$ de degré 3. Démontrer que $\{S, S', S'', S^{(3)}\}$ forme une base de E_3 et que $\{S', S'', S^{(3)}\}$ forme une base de E_2. Écrire la matrice de f relativement à ces bases.

(7) Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{lll} E & \rightarrow & E \\ P & \mapsto & Q \text{ tel que } Q(X) = P(X+2) + P(X) - P(X+1). \end{array} \right.$$

(a) Montrer que $f(E) \subset E$ et que f est une application linéaire de E sur lui-même.
(b) Déterminer Ker$f$ et Imf.
(c) Existe-t-il une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ?$$

(8) Soit E un espace vectoriel sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $\{u(x_0), u^2(x_0), ..., u^n(x_0)\}$ forme une famille libre.
(a) Montrer que u est un automorphisme de E.
(b) Montrer qu'il existe $a_0, ..., a_{n-1}$ dans K tels que

$$u^n(x_0) + a_{n-1}u^{n-1}(x_0) + ... + a_1 u(x_0) + a_0 x_0 = 0.$$

En déduire que

$$u^n + a_{n-1}u^{n-1} + ... + a_1 + a_0 I = 0.$$

(c) Soit $v \in \mathcal{L}(E)$, on suppose que $v \circ u = u \circ v$. Montrer qu'il existe $b_0, ..., b_{n-1}$ tels que

$$v(x_0) = b_{n-1}u^{n-1}(x_0) + ... + b_1 u(x_0) + b_0 x_0$$

puis que

$$v = b_{n-1}u^{n-1} + ... + b_1 u + b_0 I.$$

(9) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = Im(u^n)$ et $K_n = Ker(u^n)$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que
(a) pour tout $n < p$, $K_n \subset K_{n+1}$ et $I_{n+1} \subset I_n$ (inclusions strictes);
(b) pour tout $n \geq p$, $K_n = K_p$ et $I_n = I_p$.

Montrer que $E = K_p \oplus I_p$.

(10) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $3n$ et soit u un endomorphisme de E tel que $u \neq 0$ et $u^3 + u = 0$ et $rg(u) = 2n$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Id \\ 0 & Id & 0 \end{pmatrix}$$

(on pourra considérer un vecteur e_{n+1} dans $Im(u)$ et $e_{2n+1} = u(e_{n+1})$ et compléter de manière adéquate).