Produit scalaire.

1 - a) Soit $ABCD$ un parallèlogramme. Montrer que (*relation du parallèlogramme*)

$$2(AB^2 + AD^2) = AC^2 + BD^2$$

b) Soit ABC un triangle, M le milieu de $[BC]$, montrer que

$$AB^2 + AC^2 = \frac{1}{2}BC^2 + 2AM^2$$

2 - a) Soit A et B deux points distincts du plan. Montrer qu'un point M du plan appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = 0$.
b) Si $k \in \mathbb{R}$, lieu des points du plan tels que $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = k$?

3 - Soit A et B deux points distincts du plan. Déterminer le lieu des points M du plan vérifiant $MA^2 - 4MB^2 = 0$.

4 - a) Montrer que si A, B, C, D sont quatre points d'un espace euclidien, on a la relation :

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{BC} = 0$$

b) En déduire que les hauteurs d'un triangle non aplati sont concourantes.
c) Montrer que si un tétraèdre possède deux couples d'arêtes opposées orthogonales, il en est de même pour le troisième couple.

5 - Soit $ABCD$ un rectangle non plat, H et K les projetés orthogonaux respectifs de A et B sur la diagonale (BD). Calculer HK en fonction de $a = AB$ et $b = BC$.

6 - Dans un triangle ABC isocèle en A, on désigne par M le milieu de $[BC]$, H le le projeté orthogonal de M sur (AC), I le milieu de $[MH]$. Montrer que (AI) est orthogonale à (BH).

7 - Dans un triangle ABC rectangle en A, on désigne par A' le milieu de $[BC]$, H le projeté orthogonal de A sur (BC), I et J les projetés orthogonaux de H sur (AB) et (AC). Montrer que (IJ) est orthogonale à (AA').

8 - Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles du plan affine euclidien de même centre et de rayons R et R', $0 < R < R'$. Soit A et C dans $\mathcal{C}$ tels que (OA) et (OC) soient perpendiculaires. Les demi-droites $[OA[$ et $[OC[$ coupent $\mathcal{C}'$ en B et D respectivement.
Montrer que la médiane issue de O dans le triangle OAD est la hauteur issue de O dans le triangle OBC.

9 - *Puissance d'un point par rapport à un cercle.*

Soit un cercle du plan affine euclidien de centre O et de rayon R, et M un point du plan.

1) a) Soit Δ une droite passant par M et coupant $\mathcal{C}$ en A et B, soit A' le point du cercle $\mathcal{C}$ diamètralement opposé à A. Montrer que

$$\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MA'} = OM^2 - R^2\,.$$

b) Que se passe-t-il quand $A = B$ (Δ est tangente à $\mathcal{C}$ en A) ?

Le produit scalaire $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB}$, indépendant de Δ, est appelé puissance du point M par rapport à $\mathcal{C}$.

2) Soient A, B, C, D quatre points du cercle $\mathcal{C}$ tels que (AB) et (CD) soient perpendiculaires et sécantes en un point M intérieur à $\mathcal{C}$. Montrer que la médiane issue de M dans le triangle MAC est la hauteur issue de M dans le triangle MBD.

3) Soit A, B, C trois points du cercle $\mathcal{C}$, sommets d'un triangle non aplati. La hauteur issue de A coupe (BC) en K et $\mathcal{C}$ en A_1. Soit H le symétrique de A_1 par rapport à (BC).

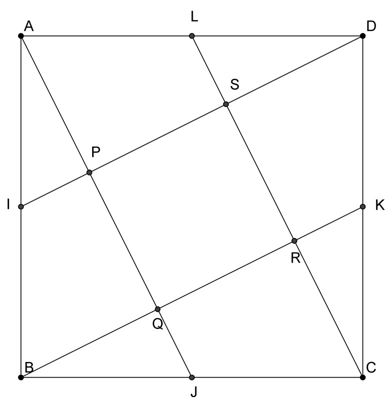
a) Montrer que : $\overrightarrow{BH}\,.\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BK}\,.\,\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KH}\,.\,\overrightarrow{AK} = 0$, et $\overrightarrow{CH}\,.\,\overrightarrow{AB} = 0$.

b) En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC.

le symétrique de l'orthocentre du triangle ABC par rapport à un côté appartient au cercle circonscrit à ce triangle.

4) Soient A, B, C, D quatre points du plan non alignés trois à trois. Si les droites (AB) et (CD) se coupent en un point M tel que $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}\,.\,\overrightarrow{MD}$, montrer que A, B, C, D sont cocycliques.

10 - Soit $ABCD$ un carré, et I, J, K, L les milieux respectifs des côtés $[AB], [BC], [CD], [DA]$. Les droites (DI) et (AJ) se coupent en P, (AJ) et (BK) se coupent en Q, (BK) et (CL) se coupent en R,(CL) et (DI) se coupent en S.



1) Montrer que $\overrightarrow{AJ}\,.\,\overrightarrow{DI} = 0$, en déduire que $PQRS$ est un rectangle.

2) Montrer que $\overrightarrow{PS}\,.\,\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{AL}\,.\,\overrightarrow{AD}$. En déduire PS en fonction de la longueur a des côtés du carré.

3) En déduire que $PQRS$ est un carré et comparer son aire et celle du carré $ABCD$.