

Réduction des endomorphismes (III).

1 - Valeurs propres, diagonalisation ou trigonalisation des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2 - Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que la restriction de f à un sous-espace vectoriel de E , stable par f , est diagonalisable.

3 - Soient f et g deux endomorphismes permutables ($f \circ g = g \circ f$) d'un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension finie. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont triangulaires supérieures.

4 - Soient f et g deux endomorphismes de \mathbb{R}^3 dont les matrices dans la base canonique sont respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que f et g commutent.

b) Donner une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle les matrices de f et g sont triangulaires.

5 - a) Soient $C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec D matrice diagonale de coefficients diagonaux deux à deux distincts, telles que $C^2 = D$. Montrer que C est une matrice diagonale.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $B^2 = A$. Montrer que B est diagonalisable.

c) Déterminer les matrices $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6 - Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & a \end{pmatrix}.$$

7 - Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

8 - Pour $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ et $x \in [0, 1]$, on pose

$$T(f)(x) = \int_0^1 \inf(x, t) f(t) dt.$$

- a) Montrer qu'on définit ainsi un endomorphisme T de $\mathcal{C}([0, 1])$.
- b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T .

9 - Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- a) Soit r le rang de A , montrer qu'il existe des matrices $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles telles que $A = PJ_rQ$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ (I_r est la matrice unité de $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$).
- b) En déduire que les polynômes caractéristiques de AB et BA sont égaux.

10 - Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ défini par $f : P \mapsto (X^2 - 1)P' - 2nXP$.

- a) Montrer que tout $\lambda \notin \{0, \pm 2, \dots, \pm 2n\}$ n'est pas valeur propre de f .
- b) Montrer que les polynômes $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tels que $f(P) = 2nP$ sont de la forme $P = c(X - 1)^{2n}$ où $c \in \mathbb{R}$.
- c) Montrer que les valeurs propres de f sont $0, \pm 2, \dots, \pm 2n$. Déterminer les sous-espaces propres associés.

11 - Le théorème de Cayley-Hamilton par les matrices compagnons.

- a) Soient (a_n) une suite d'éléments d'un corps K et soit $P \in K[X]$ tel que $P = X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$. On appelle matrice compagnon de P la matrice $A \in M_n(K)$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

En utilisant l'opération élémentaire $L_0 \leftarrow L_0 + \sum_{i=0}^{n-1} X^i L_i$, montrer que le polynôme caractéristique de A est $(-1)^n P$.

- b) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E . Soit $x \in E \setminus \{0\}$, on considère le sous-espace $F_x = \text{Vect}(f^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$.
- i) Montrer qu'il existe un entier p_x tel que $(x, f(x), \dots, f^{p_x}(x))$ soit une base de F_x . En déduire qu'il existe des scalaires a_0, a_1, \dots, a_{p_x} tel que

$$f^{p_x+1}(x) = a_0 x + a_1 f(x) + \dots + a_{p_x} f^{p_x}(x).$$

- ii) On note g l'endomorphisme induit par f sur le sous-espace F_x . Donner le polynôme caractéristique de g . Quel est son polynôme minimal?
- iii) En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.