

- (1) Soit u_n le terme général d'une série convergente. Justifier que le reste d'ordre n , R_n , défini par $\sum u_k - \sum_{k=0}^n u_k$, vaut $\sum_{p=n+1}^{\infty} u_p$.
- (2) Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série absolument convergente. Justifier l'inégalité $|\sum_{n \geq 0} u_n| \leq \sum_{n \geq 0} |u_n|$.
- (3) Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.
- (4) Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série convergente et $\sum_{n \geq 0} v_n$ la série dont le terme général est défini par : $v_{2n} = u_n$ et $v_{2n+1} = 0$. La série $\sum_{n \geq 0} v_n$ est-elle convergente?
- (5) Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.
 - (a) Montrer que s'il existe deux constantes $a > 0$ et $b > 0$ et un entier n_0 tels que, pour tout $n \geq n_0$, $0 < au_n \leq v_n \leq bu_n$ ces deux séries sont de même nature.
 - (b) Que peut-on dire si on suppose seulement $0 \leq v_n \leq bu_n$ pour tout $n \geq n_0$?
 - (c) Montrer que si $u_n \simeq v_n$ quand $n \rightarrow \infty$, ces deux séries sont de même nature (on rappelle que $u_n \simeq v_n$ s'il existe une suite ϵ_n tendant vers 0 telle que $u_n = v_n(1 + \epsilon_n)$).
 - (d) Montrer que si $\sum u_n$ converge et si (a_n) est une suite bornée alors $\sum a_n u_n$ converge.
- (6) Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes positifs. Montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si et seulement si $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{1+u_n}$ converge.
- (7) Démontrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right)$; $\sum_{n=2}^{\infty} \log \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$; $\sum_{n=2}^{\infty} \arctan \frac{2}{n^2}$ (on pourra développer $\arctan \frac{1}{n-1} - \arctan \frac{1}{n+1}$).
- (8) Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. Étudier la nature des séries de terme général

$$u_n = \left(\frac{2+i}{3} \right)^n ; v_n = \frac{a^n}{n+b^n} ; w_n = 1 - n^2 \sin \left(\frac{1}{n^2-1} \right) ;$$

$$T_n = \sqrt{n^4 + 2n + 1} - \sqrt{n^4 + an}, U_n = \log \left(\frac{1 + \sin(1/n)}{1 - \sin(1/n)} \right) ;$$

$$V_n = \sin \left(\frac{a^n}{n!} \right) ; W_n = \frac{\sqrt{n} \log(n)}{n^2 + 1}.$$
- (9)
 - (a) La convergence de la série à termes positifs u_n implique-t-elle $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 0$?
 - (b) On suppose que la série à termes positifs u_n converge et que la suite u_n est décroissante. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 0$.
 - (c) On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 0$, la série $\sum u_n$ converge-t-elle?

- (10) (a) Que peut-on dire sur la nature de la série de terme général u_n qui satisfait la propriété suivante : il existe $l \in]0, 1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| \leq l$? Même question s'il existe $L > 1$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| \geq L$.
- (b) Enoncer et démontrer le critère de convergence de d'Alembert.
- (c) Etudier la nature des séries de terme général

$$u_n = \frac{2^n n!}{n^n}, \quad v_n = \frac{e^n n!}{n^n}, \quad w_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

- (11) Montrer que la série de terme général $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ converge et majorer

le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{k^2}$ (on pourra utiliser la minoration : $x \in]0, 1[$, $\frac{\ln(1+x)}{x} \geq \ln 2$).

- (12) Soit f une fonction continue décroissante, positive définie sur l'intervalle $[n_0, +\infty[$.

(a) Montrer que la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_{n_0}^{\infty} f(t) dt$ sont de même nature (majorer et minorer $\int_n^{n+1} f(t) dt$).

(b) En déduire le comportement des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

(c) Pour $\alpha > 0$, on pose $S_\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ montrer que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha S_\alpha = 1$.

- (13) Extrait Capes 88. Soit u_n la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par

$$u_n = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t}.$$

On note γ la somme de la série de terme général u_n (γ est la constante d'Euler). On pose pour $n > 0$, $\gamma_n = \sum_{k=1}^n u_k$, $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$.

(a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, que γ_n est une suite croissante, que cette suite converge et que $\gamma \in [0, 1]$.

(b) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{udu}{n+u}$.

(c) En déduire que, pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \leq u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$

et que, pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{2(n+1)} \leq r_n \leq \frac{1}{2n}$.

(d) On approche γ par γ_n . Déterminer un entier n permettant d'obtenir une précision de 10^{-2} .

- (14) Etudier la nature des séries de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$

$$\text{et } v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt.$$