

Séries numériques (II).

- 1** - Soit  $(u_n)$  une suite décroissante de réels  $\geq 0$ .
- Montrer que si la série  $\sum u_n$  converge, alors  $nu_n$  tend vers 0. Réciproque?
  - Montrer que les séries de terme général  $u_n$  et  $2^n u_{2^n}$  sont de même nature. Retrouver la nature des séries de Riemann  $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  et de Bertrand  $\sum_2^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ .
- 2** - Règle des séries alternées.
- Soit  $(a_n)$  une suite décroissante de réels positifs convergeant vers 0. On considère la série de terme général  $u_n = (-1)^n a_n$ .
- Montrer que les suites des sommes partielles  $(S_{2n})$  et  $S_{2n+1}$  sont adjacentes. En déduire la convergence de la série de terme général  $(u_n)$ . Quel est le signe de sa somme ?
  - Montrer que  $|R_n| \leq a_{n+1} = |u_{n+1}|$ .
- 3** - Etudier la nature des séries de terme général  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  et  $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ . A-t-on  $u_n \sim v_n$ ? Conclusion?
- 4** - Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites à valeurs réelles ou complexes. Pour  $n \geq 1$  on pose ,  
 $U_n = \sum_{k=1}^n u_k$ .
- Montrer que  $\sum_{k=1}^n u_k v_k = \sum_{k=1}^{n-1} U_k (v_k - v_{k+1}) + U_n v_n$  (transformation d'Abel).
  - Règle d'Abel. On suppose que:
    - la suite  $(v_n)$  est décroissante (ou plus généralement est à variations bornées, c'est à dire : la série  $\sum |v_n - v_{n+1}|$  converge) et tend vers 0,
    - la suite des sommes partielles  $(U_n)$  est bornée.
- Montrer que la série  $\sum u_n v_n$  est convergente et que  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n (v_n - v_{n+1})$ .
  - Soit  $M$  un majorant de la suite  $(|U_n|)$ . Montrer que le reste  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k v_k$  vérifie,  $|R_n| \leq 2M \sum_{k=n+1}^{+\infty} |v_k - v_{k+1}|$ . En particulier si  $(v_n)$  converge vers 0 en décroissant, on a  $|R_n| \leq 2M v_{n+1}$ .
  - Retrouver les résultats concernant les séries alternées.
- 5** - a) Etudier la convergence de la série de terme général  $\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$  pour  $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ ,  $\alpha > 0$ . Montrer que  $|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k^\alpha} \right| \leq \frac{2}{\sin \frac{\theta}{2}} \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ .
- b) Nature des séries de terme général  $\frac{\cos n\theta}{n^\alpha}$ ,  $\frac{\cos^2 n\theta}{n^\alpha}$ ,  $\frac{|\cos n\theta|}{n^\alpha}$ .
- 6** - Nature des séries de terme général

$$(1) \quad \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) \quad (2) \quad (-1)^n(\sqrt{n^2+1}-n) \quad (3) \quad \frac{\cos n}{\sqrt{n} + \cos n}$$

7 - Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  des suites de réelles  $> 0$ .

1) On suppose que pour tout entier  $n$  on a  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ . Montrer que la convergence de la série  $\sum_0^\infty v_n$  entraîne celle de la série  $\sum_0^\infty u_n$ , et la divergence de la série  $\sum_0^\infty u_n$  entraîne celle de la série  $\sum_0^\infty v_n$ .

*Application.* On suppose que  $\beta > 1$  et pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq (\frac{n+1}{n})^{-\beta}$ . Montrer que la série de terme général  $u_n$  converge.

2) *Règle de Duhamel.*

a) On suppose que :  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$ . Montrer que la série de terme général  $u_n$  converge si  $\alpha > 1$  et diverge si  $\alpha < 1$ .

b) *cas  $\alpha = 1$ .* On suppose que :  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$  où  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Montrer que la série de terme général  $u_n$  diverge (considérer  $v_n = \frac{1}{n+c}$  avec  $c > 0$  convenable).

Étudier la nature de la série de terme général  $\frac{(n!)^\alpha}{n^n} e^{\beta n}$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels.

8 - Étudier la nature de la série de terme général  $u_n$  défini par  $u_1 > 0$  et  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+a}$  où  $a > 0$ . Dans la cas où elle converge calculer sa somme.

9 - Soit  $(u_n)$  une suite de réels  $> 0$  convergeant vers 0.

a) On suppose que la série de terme général  $u_n$  converge et on désigne par  $R_n = \sum_{n+1}^\infty u_k$  le reste d'ordre  $n$  de cette série. Montrer que la série de terme général  $\frac{u_{n+1}}{R_n^\alpha}$  converge pour  $0 < \alpha < 1$  et diverge pour  $\alpha \geq 1$ .

b) On suppose que la série de terme général  $u_n$  diverge et on désigne par  $S_n = \sum_1^n u_k$  sa somme partielle d'ordre  $n$ . Montrer que la série de terme général  $\frac{u_n}{S_n^\alpha}$  converge pour  $\alpha > 1$  et diverge pour  $0 < \alpha \leq 1$ .

10 - a) Montrer que si une suite à valeurs complexes  $(a_n)$  converge, alors la suite de terme général  $\frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n)$  converge vers la même limite.

b) Soit  $(u_n)$  une suite à valeurs complexes telle que la série de terme général  $\sum \frac{u_n}{n}$  converge. On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k}$ , montrer que  $\frac{1}{n}(u_1 + \dots + u_n) = S_n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S_k$ . En déduire que la suite de terme général  $\frac{1}{n}(u_1 + \dots + u_n)$  est convergente.

11 - *Convergence commutative.*

Soit  $(u_n)$  une suite de réels positifs et  $\sigma$  une bijection de  $\mathbb{N}$  sur  $\mathbb{N}$ . Montrer que la série de terme général  $u_n$  converge si et seulement si la série de terme général  $u_{\sigma(n)}$  converge, et dans ce cas on a,  $\sum_0^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$ .

12 - Soit  $\sum_{n \geq 1} u_n$  une série complexe convergente. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k \text{ et } v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k u_k.$$

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{n=1}^N S_n = \sum_{k=1}^N (N-k+1) u_k$ .

En déduire que la série  $\sum_n v_n$  est convergente et a même somme que  $\sum_n u_n$ .