

SEMAINE 5 - BARYCENTRES.

- (1) Donner une (ou plusieurs) constructions du barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 3)$. Que se passe-t-il si on essaie d'appliquer ces constructions à $(A, 2)$ et $(B, -2)$? Plus généralement, donner une construction du barycentre d'un système de deux points pondérés à poids rationnels.
- (2) Soit \mathcal{E} un espace affine et f une application de \mathcal{E} dans \mathcal{E} . Les assertions suivantes sont équivalentes :
- (a) f est affine ;
 - (b) f "conserve" le barycentre (si M est le barycentre d'un système pondéré $(A_i, \alpha_i)_{i \in I}$ alors $f(M)$ est barycentre du système $(f(A_i), \alpha_i)_{i \in I}$).
- (3) *Théorème de Ceva*. Soient A, B, C, M des points d'un plan affine réel avec A, B, C non alignés. On suppose que les droites (AM) et (BC) sont sécantes en $A' \neq C$, que les droites (BM) et (CA) sont sécantes en $B' \neq A$, et que les droites (CM) et (AB) sont sécantes en $C' \neq B$. Montrer que

$$\frac{\overline{A'B} \overline{B'C} \overline{C'A}}{\overline{A'C} \overline{B'A} \overline{C'B}} = -1.$$

- (4) Dans le plan affine réel, on considère trois points non alignés A, B, C . Soient α, β, γ trois réels non nuls tels que $\alpha + \beta + \gamma = 0$. On désigne par A' le barycentre de $(B, \beta), (C, \gamma)$, par B' celui de $(A, \alpha), (C, \gamma)$ et C' celui de $(A, \alpha), (B, \beta)$. Montrer que les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont parallèles.
- (5) Soient A et B deux points distincts et G le barycentre du système $(A, \alpha), (B, \beta)$ (avec $\alpha + \beta \neq 0$). Comment choisir α' et β' pour que $(A, \alpha'), (B, \beta')$ ait un barycentre G' symétrique de G par rapport au milieu I de $[AB]$?
- (6) Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé d'origine O , soit $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ les points d'affixes respectives $(e^{i2k\pi/n})_{1 \leq k \leq n}$ (sommets d'un polygone régulier).
- (a) Montrer que l'isobarycentre des points $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ est l'origine.
 - (b) Quel est l'isobarycentre des points $(A_k)_{2 \leq k \leq n}$? (On a retiré le point A_1).