

SEMAINE 1 - NOMBRES COMPLEXES.

- (1) Montrer que, pour tout  $z, z' \in \mathbb{C}$ ,

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

Donner une interprétation géométrique de cette égalité. Retrouver une égalité bien connue.

- (2) Soit  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$  et  $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$  avec  $z_1 \neq 0$ . Montrer que

$$|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| = |z_1 + \dots + z_n|$$

si et seulement si il existe, pour tout  $i$  de 2 à  $n$ , un réel  $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$  tel que  $z_i = \lambda_i z_1$ . Quelle interprétation géométrique peut-on donner de ce résultat ?

- (3) Montrer que si un polynôme à coefficients réels admet la racine complexe non réelle  $z_0$ , il admet aussi  $\bar{z}_0$  comme racine.  
(4) Décomposer en produit de deux polynômes irréductibles sur  $\mathbb{R}$  le polynôme  $X^4 + X^2 + 1$ .  
(5) Montrer que, dans  $\mathbb{Z}$ , tout produit de somme de deux carrés est une somme de deux carrés.  
(6) Soit  $a \in \mathbb{C}$ ,  $|a| < 1$ . On définit  $\varphi_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  par

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

Montrer que l'on définit ainsi une bijection du cercle unité sur lui-même. Quelles sont l'image de l'intérieur et de l'extérieur du cercle unité ?

- (7) Montrer qu'il existe une unique suite  $(P_n)$  de polynômes satisfaisant, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $z \in \mathbb{C}^*$ ,

$$P_n \left( z + \frac{1}{z} \right) = z^n + \frac{1}{z^n}.$$

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n$  est unitaire et de degré  $n$ .

Montrer que pour tout  $\theta$  réel,  $P_n(2 \cos(\theta)) = 2 \cos(n\theta)$ . En déduire les racines de  $P_n$ .

- (8) Montrer que pour tout  $z, z' \in \mathbb{C}$  satisfaisant  $zz' \neq 1$  et  $|z| = 1 = |z'|$ , le nombre  $\frac{z + z'}{1 + zz'}$  appartient à  $\mathbb{R}$ .  
(9) Soient  $\alpha$  et  $\gamma$  des nombres réels. Quel est l'ensemble des points d'affixe  $z$  tels que  $\alpha z \bar{z} + \beta \bar{z} + \bar{\beta} z + \gamma = 0$ .