UNIVERSITE D'ORLEANS **CAPES 2008-2009**
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES **S. Grellier**

Semaine 16 - Exercices d'analyse.

(1) Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par
$$f_n : \begin{cases} x & \mapsto x^2 \sin \frac{1}{nx} \quad \text{si } x \neq 0 \\ x & \mapsto 0 \quad \text{si } x = 0. \end{cases}$$
   (a) Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
   (b) Montrer qu'elle converge uniformément sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer qu'elle n'est pas uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

(2) Etudier la convergence simple, la convergence uniforme et la convergence uniforme sur tout compact de la suite de fonctions définie par $f_n(x) = \cos^n x$ pour $x \in [0, \pi/2]$. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$.

(3) Soit (f_n) une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers une fonction g sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une fonction φ à valeurs positives, intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$. Montrer que f_n, $n \in \mathbb{N}$, et g sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et que $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt$.

(4) Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions définie par $f_n(x) = nx^2e^{-nx}$, $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

(5) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ converge uniformément sur $[0, a]$ pour tout $a > 0$ mais pas sur $[0, \infty[$. Démontrer que sa somme définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, \infty[$.

(6) Pour tout x réel et tout entier naturel non nul, on note $P_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1 + x^k)$. De plus, lorsque $\lim_{n\to\infty} P_n(x)$ existe, on notera $P(x)$ cette limite. Si $x \in]-1, 1[$ et k un entier naturel non nul, on note $u_k(x) = \log(1 + x^k)$.
   (a) Montrer que, quel que soit $a \in]0, 1[$, la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ est uniformément convergente sur $[-a, +a]$ et que $|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} -\log(1 - a^k)$.
   (b) Montrer que la suite de fonctions (P_n) est uniformément convergente sur $[-a, a]$. En déduire que P est définie sur $[-1, 1[$, continue sur $]-1, 1[$ et à valeurs strictement positives sur $]-1, 1[$.

(7) Soit la série de fonctions $\sum u_n$ avec $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \arctan \frac{x}{\sqrt{n}}$. Montrer que cette série converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction impaire bornée. Cette fonction est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

(8) *D'après Capes 79.* On considère la fonction ϕ_x définie sur $\mathbb{R}$, pour x fixé dans $\mathbb{R}$,
$$\text{pour } u \neq 0 \ \phi_x(u) = \frac{ue^{ux}}{e^u - 1} \text{ et } \phi_x(0) = 1.$$
   (a) Montrer que ϕ_x est continue sur $\mathbb{R}$ et développable en série entière pour $|u| < 2\pi$; on note
$$\phi_x(u) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{u^n}{n!}.$$
   Etablir la relation de récurrence $B_n(x) = x^n - \frac{1}{n+1}\sum_{q=2}^{n+1} C_{n+1}^q B_{n+1-q}(x)$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in N$, B_n est un polynôme de degré n en x et que $B_n(0) = B_n(1)$ pour tout $n \neq 1$ (on pourra comparer ϕ_0 et ϕ_1).

(9) Soit (u_n) une suite de nombres complexes telle que $\sum u_n$ converge ; soit (S_n) la suite de ses somme partielles.

(a) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n x^n}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n x^n}{n!}$ convergent pour tout x réel.

(b) On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $B(x) = e^{-x} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n x^n}{n!}$. Justifier la dérivabilité de B et montrer que $B(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{n+1} t^n}{n!} dt.$

(c) Soit (a_n) une suite de nombres complexes convergeant vers l. Montrer que

$$\lim_{x \to \infty} (e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}) = l.$$

(d) Montrer alors l'égalité

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{n+1} t^n}{n!} dt.$$

(10) Déterminer le rayon de convergence et le comportement sur le cercle de convergence des séries suivantes. $\displaystyle\sum \frac{z^{3n}}{8^n(n+1)}$, $\sum z^n$, $\displaystyle\sum \frac{z^n}{n}$.

(11) Déterminer les solutions développables en série entière au voisinage de 0 de l'équation différentielle $-x^2 y'' - 2xy' + y = \arctan x$.