UNIVERSITE D'ORLEANS **CAPES 2008-2009**
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES **S. Grellier**

Semaine 3 - Exercices d'algèbre.

(1) Décomposer en produit de deux polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ le polynôme $X^4 + X^2 + 1$.

(2) Montrer que, dans $\mathbb{Z}$, tout produit de somme de deux carrés est une somme de deux carrés.

(3) Soit $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$. On définit $\varphi_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par
$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}.$$
Montrer que l'on définit ainsi une bijection du cercle unité sur lui-même. Quelles sont l'image de l'intérieur et de l'extérieur du cercle unité ?

(4) Montrer qu'il existe une unique suite (P_n) de polynômes satisfaisant, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}^*$,
$$P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}.$$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est unitaire et de degré n.

Montrer que pour tout θ réel, $P_n(2\cos(\theta)) = 2\cos(n\theta)$. En déduire les racines de P_n.

(5) Montrer que pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$ satisfaisant $zz' \neq 1$ et $|z| = 1 = |z'|$, le nombre $\dfrac{z + z'}{1 + zz'}$ appartient à $\mathbb{R}$.

(6) Soient α et γ des nombres réels. Quel est l'ensemble des points d'affixe z tels que $\alpha z\overline{z} + \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + \gamma = 0$.

(7) Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants, après avoir indiqué ce que vous entendez par cette expression.
$z_1 = -3 - 4i$
$z_2 = iz_1$

(8) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $u = \frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$ a pour module 1. Réciproquement, peut-on représenter ainsi tout nombre complexe de module 1 ?

(9) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = \overline{z}$.

(10) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
$$z + (1 - 3i)(1 - i) + (2 - i)z = 0$$
$$z + 2i\overline{z} + 2(1 + i) - 3 + 2i = 0$$
$$\frac{z^3 - 1}{z - 1} = 0$$
$$z^4 + 1 = 0$$
$$z^2 - 3z + 3 + i = 0.$$

(11) Soit E, F deux espace vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

(a) Montrer que f est injective si et seulement si f transforme toute famille libre de E en une famille libre de F.

(b) Montrer que f est surjective si et seulement si il existe une famille génératrice de E transformée en une famille génératrice de F.

(12) Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = Id$.

(a) Montrer que $E = Ker(f - Id) \oplus Im(f - Id)$.

(b) Montrer que $Ker(f - Id) = Im(f^2 + f + Id)$ et $Im(f - Id) = Ker(f^2 + f + Id)$.

(13) On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles.
Soit $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+3} + u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n = 0\}$.

(a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(b) Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}^3$ l'application qui à une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe le triplet (u_0, u_1, u_2). Montrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire la dimension de E.

(c) Déterminer toutes les suites géométriques appartenant à E. En déduire une base de E.

(d) Déterminer l'élément $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E satisfaisant $u_0 = 0$ et $u_1 = u_2 = 1$.

(e) Soit $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \mid u_0 = 0\}$. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.

(14) Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \deg P \leq 1\}$.

(a) Montrer que $\mathbb{R}_3[X] = F \oplus G$.

(b) Donner une méthode pour trouver la décomposition de tout polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ suivant cette somme directe.

(15) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, on suppose que le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ de P par $(X-1)$ (respt par $(X-2)$) est 1 (respt 2). Déterminer le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ de P par $(X-1)(X-2)$.

(16) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X \sin\theta + \cos\theta)^n$ par $X^2 + 1$.

(17) Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ (avec $n \geq 1$).

(a) Montrer que si P admet une racine rationnelle $\alpha = p/q$ avec p et q premiers entre eux alors p divise a_0 et q divise a_n.

(b) Montrer que le polynôme $6X^4 - 11X^3 - X^2 - 4$ admet des racines rationnelles et les déterminer. En déduire sa décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

(18) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$, $n = pq + r$ avec $0 \leq r < p$ (division euclidienne de n par p), et soit $a \in \mathbb{C}$.

(a) Montrer que le reste de la division euclidienne de X^n par $X^p - a$ est $a^q X^r$.

(b) Montrer que le reste de la division euclidienne de $X^n - a^n$ par $X^p - a^p$ est $a^{pq}(X^r - a^r)$.

(c) Soit $d = n \wedge p$ le pgcd de n et p. Montrer que le pgcd des polynômes $X^n - a^n$ et $X^p - a^p$ est $X^d - a^d$.