

Semaine 21 - Exercices analyse.

(1) D'après Capes 96. Soient λ et μ deux nombres réels. Soit $I = [0, 1]$, on considère le problème différentiel (P) : $-y''(t) + c^2y(t) = f(t)$, $c > 0$, $t \in I$; $y(0) = \lambda$ et $y(1) = \mu$.

(a) Montrer que les fonctions Y_0 et Y_1 définies par $Y_0(t) = \text{sh}(ct)$ et $Y_1(t) = \text{sh}(c(1-t))$ forment une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle. On rappelle que $\text{sh}(p+q) = \text{sh}(p)\text{ch}(q) + \text{sh}(q)\text{ch}(p)$.

(b) Une fonction $f \in \mathcal{C}(I)$ étant fixée, déterminer en fonction de Y_0 et Y_1 les solutions de l'équation différentielle $-y''(t) + c^2y(t) = f(t)$.

(c) Montrer que (P) a une unique solution qui se met sous la forme :

$$y(t) = \frac{\text{sh}(ct)}{\text{sh}(c)} \left[\mu + \frac{1}{c} \int_t^1 f(s)\text{sh}(c(1-s))ds \right] + \frac{\text{sh}(c(1-t))}{\text{sh}(c)} \left[\lambda + \frac{1}{c} \int_0^t f(s)\text{sh}(cs)ds \right].$$

(2) Soit

$$c : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} \frac{3t}{t^3+1} \\ \frac{3t^2}{t^3+1} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Etudier la courbe paramétrée c . Indication : montrer qu'on peut se restreindre aux valeurs du paramètre t comprises entre -1 et 1 .

(3) Spirographe. Soit $r, r_1, R > 0$, tels que $R + r_1 = 1$. On pose un crayon à une distance r du centre d'un disque de rayon r_1 . Ce disque roule (sans glisser) à vitesse constante sur le cercle trigonométrique. La distance entre les deux centres est R . Etudier la courbe paramétrée ainsi obtenue.

(4) Construire la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x(t) & = & \frac{t}{t^2-1} \\ y(t) & = & \frac{t^2}{t-1} \end{cases}$$

Déterminer ensuite les coordonnées du point double I et montrer que les tangentes en I sont orthogonales.

(5) Trouver toutes les applications f de classe \mathcal{C}^2 telles que $f''(x) + f(-x) = 8x \exp(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(6) Résoudre l'équation $y' = 2ty^2$ avec $y(t_0) = y_0$. Esquisser l'allure des solutions suivant les valeurs de t_0 et y_0 .

(7) Extrait Capes 93. Soit f une fonction à valeurs réelles, continue et bornée sur $[0, \infty[$, et telle que, pour tout réel strictement positif x , l'intégrale $\int_0^\infty \frac{tf(t)}{x^2+t^2} dt$ soit convergente. On pose pour tout entier $n \geq 0$, $x > 0$

$$u_n(x) = \int_n^{n+1} \frac{tf(t)}{t^2+x^2} dt \text{ et } (Sf)(x) = \int_0^\infty \frac{tf(t)}{t^2+x^2} dt.$$

(a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=0}^\infty u_n(x)$ converge simplement vers $(Sf)(x)$ et que $u_n(x)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, \infty[$.

(b) Déterminer α et β complexes tels que $\frac{t}{t^2+x^2} = \frac{\alpha}{x-it} + \frac{\beta}{x+it}$, en déduire que $|\frac{\partial^k}{\partial x^k}(\frac{t}{t^2+x^2})| \leq \frac{k!}{(x^2+t^2)^{(k+1)/2}}$ pour tout $k \geq 1$ et tout $(x, t) \neq (0, 0)$. Soit $a > 0$, montrer qu'il existe $A_k > 0$ tel que pour tout $x \geq a$, et pour tout entier $n \geq 0$, on ait $|\frac{d^k}{dx^k}(u_n(x))| \leq A_k \int_n^{n+1} \frac{dt}{(a^2+t^2)^{(k+1)/2}}$, en déduire que la série de fonctions $\sum_{n=0}^\infty u_n^{(k)}(x)$ converge normalement sur $[a, \infty[$.

(c) Démontrer que la fonction Sf est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, \infty[$ et que pour tout $k > 0$ on a : $\frac{d^k}{dx^k}(Sf)(x) = \int_0^\infty \frac{\partial^k}{\partial x^k}(\frac{t}{x^2+t^2})f(t)dt$.