UNIVERSITE D'ORLEANS **CAPES 2008-2009**
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES **S. Grellier**

Semaine 3 - Exercices d'analyse

(1) Soit (u_n) une suite réelle qui tend vers $+\infty$. Démontrer que l'ensemble $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ admet un plus petit élément.

(2) Soit (u_n) une suite réelle bornée qui diverge. Démontrer que l'on peut trouver deux sous-suites extraites de (u_n) qui convergent vers des limites distinctes.

(3) Soit (u_n) une suite réelle. Démontrer que la suite (u_n) est non majorée si et seulement si elle possède une suite extraite qui tend vers $+\infty$.

(4) **Constante d'Euler** On considère les suites définies par $u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$, $v_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ et $x_n = \log(n)$.

  (a) Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $u_n \leq x_n \leq v_n$ et donner une interprétation graphique.

  (b) Etudier la convergence des suites (u_n), (v_n) et (x_n).

  (c) Démontrer que les suites $(v_n - x_n)$ et $(1 + u_n - x_n)$ sont adjacentes.
  La limite commune de ces deux suites se note γ et est appelée la constante d'Euler.

  (d) Donner un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée de γ à 10^{-3} près. Préciser la valeur obtenue sur votre calculatrice programmable.

(5) Soit (u_n) une suite à termes réels strictement positifs. Démontrer que si la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ admet pour limite $+\infty$, alors il en est de même de la suite $((u_n)^{1/n})_{n\geq 1}$.

(6) Soit (u_n) une suite à termes réels strictement positifs.
On suppose que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ admet pour limite un nombre réel a. Etudier la convergence de la suite (u_n) dans chacun des cas $0 < a < 1$ et $a > 1$. Dans le cas $a = 1$, montrer que l'on ne peut pas conclure.

(7) Démontrer que la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$ admet pour limite $+\infty$.

(8) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$, et $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$.

  (a) Montrer par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$$\exists P_n \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } \forall x > 0 \quad f^{(n)}(x) = e^{-1/x} P_n\left(\frac{1}{x}\right)$$

  (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est n fois dérivable en 0 et $f^{(n)}(0) = 0$.

  (c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(9) (a) Montrer que la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ admet une fonction réciproque notée arctan.

  (b) Montrer que la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée notée $(\arctan)'$.

  (c) Montrer, pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$, l'égalité : $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

  (d) Etablir pour tout x de $\mathbb{R}^+$, l'encadrement : $0 \leq \arctan x \leq x$.

(e) Montrer que $\arctan x \underset{x\to 0}{\backsim} x$.

(10) Déterminer les applications continues f de$\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}$ $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

(11) On veut déterminer toutes les fonctions f, continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,vérifiant :

$$(1) \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y)).$$

(a) On suppose que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que pour tout entier positif n et k, $f(k/2^n) = 0$.

(b) Montrer que tout nombre réel x est limite d'une suite de rationnels de la forme $k/2^n$.En déduire la fonction f.

(c) Trouver toutes les fonctions vérifiant (1)

(d) Déterminer toutes les applications continues g de $]0, \infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout couple (x, y) de réels > 0 : $2g(xy) = g(x^2) + g(y^2)$.

(12) Etudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{l} x^2 \text{ si } x \in \mathbb{Q}; \\ x \text{ si } x \notin \mathbb{Q}. \end{array} \right.$$

(13) Donner des exemples de fonctions admettant différentes sortes de droites asymptotes ou de direction asymptotiques.

(14) Etudier la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. La représenter graphiquement. Dans un repère orthornormé, montrer que la droite d'équation $x = -1/2$ est axe de symétrie de la courbe représentative.

(15) Montrer que les seules applications continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{Z}$ sont les fonctions constantes.