UNIVERSITE D'ORLEANS **CAPES 2008-2009**
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES **S. Grellier**

Semaine 8 - Exercices de géométrie.

(1) Démontrer le *théorème de Ménélaüs* en utilisant les projections. Soit un triangle (ABC) et des points P, Q, et R respectivement sur les droites (BC) (privée de B et C), (CA) (privée de C et A) et (AB) (privée de A et B).On suppose que les points P, Q, R sont alignés, montrer que

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1.$$

(2) Un parallélogramme étant défini par la propriété "les diagonales ont même milieu" (dans les quadrilatères), montrer la propriété caractéristique suivante : "ABCD est un parallélogramme s'il existe un point I tel que $s(A) = C$ et $s(D) = B$ où s est la symétrie centrale de centre I". Autres propriétés caractéristiques du parallélogramme ?

(3) Montrer que tout parallélogramme inscrit dans un cercle est un rectangle.

(4) **Le quadrilatère complet.** Dans le plan affine, on considère un quadrilatère $(ABCD)$ tel que les droites (AB) et (CD) soient sécantes en F et les droites (AD) et (BC) en E. La configuration obtenue s'appelle un quadrilatère complet. Ses diagonales sont les segments $[AC]$, $[BD]$ et $[EF]$.

On veut montrer que les milieux respectifs I, J et K de ces trois diagonales sont alignés. On introduit les points I', J' tels que les quadrilatères $AFCI'$ et $BFDJ'$ soient des parallèlogrammes et on considère les homothéties h_1 et h_2 de centre E telles que $h_1(B) = C$ et $h_2(D) = A$.

(a) Déterminer l'image de la droite (BJ') par la transformation $h_2 \circ h_1$.
(b) Déterminer l'image de la droite (DJ') par la transformation $h_1 \circ h_2$.
(c) Démontrer que les points E, I' et J' sont alignés et conclure.

(5) Soient p, q et r trois homothéties distinctes de l'identité, de centre respectifs P, Q et R distincts deux à deux telles que $p \circ q$ ne soit pas une translation et que $p \circ q \circ r = r \circ p \circ q$. Montrer que P, Q, R sont alignés.

(6) *Théorème de Pappus.*

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites distinctes d'un espace affine E et soient A, B, C trois points de $\mathcal{D}$, A', B', C' trois points de $\mathcal{D}'$. On note $P = (BC') \cap (CB')$, $Q = (CA') \cap (AC')$, $R = (AB') \cap (BA')$, si ces points existent.

(a) On suppose que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles. Montrer que P, Q, R, s'ils existent, sont alignés (on pourra utiliser l'homothétie h_1 de centre P telle $h_1(B) = C'$ et deux autres homothéties bien choisies h_2 et h_3 puis démontrer que $h_1 \circ h_2^{-1} \circ h_3 = h_3 \circ h_2^{-1} \circ h_1$.)
(b) On suppose que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en O et $O \notin \{A, B, C, A', B', C'\}$. On choisit un repère cartésien $(0, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i}$ dirige $\mathcal{D}$ et $\vec{j}$ dirige $\mathcal{D}'$. Calculer les coordonnées de P, Q, R et montrer qu'ils sont alignés.

(7) *Théorème de Desargues.*

Soient (A, B, C) et (A', B', C') deux triplets de points non alignés d'un espace affine E tels que les droites (AA'), (BB') et (CC') soient distinctes et concourrantes en un point S. On suppose $A \neq A'$, $B \neq B'$ et $C \neq C'$.

(a) Montrer qu'il existe des scalaires a, b, c tels que A' soit le barycentre des points $\{(S, 1), (A, a)\}$, B' soit le barycentre des points $\{(S, 1), (B, b)\}$, C' celui des points $\{(S, 1), (C, c)\}$.

(b) Vérifier que, si $b \neq c$, le barycentre de $\{(B, b), (C, -c)\}$ est le point P d'intersection des droites (BC) et $(B'C')$.

(c) Déterminer de même les points $Q = (CA) \cap (C'A')$ et $R = (AB) \cap (A'B')$ et montrer que P, Q, R sont alignés.

(d) dans le cas où les droites (BC) et $(B'C'$ sont parallèles, mais où Q et R existent, montrer que la droite (QR) est parallèle à la droite (BC).

(8) Soient a, b, c des réels tels que c soit non nul. On se place dans le plan affine muni d'un repère.

(a) Déterminer la nature et les éléments géométriques de l'application φ du plan dans le plan définie analytiquement par $x' = cx + a$ et $y' = cy + b$.

(b) Soit Γ une courbe d'équation $f(x, y) = 0$ où f désigne une application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble Γ' défini par $f(cx + a, cy + b) = 0$ se déduit de Γ par une transformation que l'on précisera.

(9) Montrer qu'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même qui laisse stable toute droite vectorielle est une homothétie vectorielle.