UNIVERSITÉ D'ORLÉANS **CAPES 2008-2009**
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES **S. Grellier**

Semaine 19 - Séries de Fourier III.

(1) On rappelle que, pour $f, g \in \mathcal{C}$ (continues et 2π-périodique), on définit, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)\, g(y)\, dy = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\, g(x-y)\, dy.$$

(a) On note $D_n, n \in \mathbb{N}$, la famille des *noyaux de Dirichlet* et $K_n, n \in \mathbb{N}$, la famille des *noyaux de Féjer* c'est-à dire que

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx},\ K_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} D_m(x),\ n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que

$$D_n(x) = \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}, \qquad (n+1)K_n(x) = \left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2.$$

Soit f une fonction 2π–périodique et continue par morceaux.

(b) Montrer que les sommes partielles des séries de Fourier de f sont données par $S_n(f) = f * D_n$ et que les moyennes de Cesarò de (S_n) sont données par $f * K_n$.

(c) Montrer que, lorsque $f \in \mathcal{C}$, les moyennes de Cesarò de $S_N(f)$ converge uniformément vers f. On écrira que, pour tout $0 < \epsilon < \pi$,

$$\begin{aligned} f * K_N(x) - f(x) &= \int_{|y|<\epsilon} [f(x-y) - f(x)]K_N(y)dy \\ &+ \int_{\epsilon<|y|<\pi} [f(x-y) - f(x)]K_N(y)dy \end{aligned}$$

et on utilisera que, pour tout $\epsilon < |y| < \pi$, $0 \le K_N(y) \le \frac{1}{(N+1)\sin(\varepsilon/2)}$.

(d) En déduire que, si f est dans $\mathcal{C}$ et si $\sum |c_n(f)| < \infty$, alors la suite des sommes partielles $(S_N(f))$ converge normalement vers f.

(e) Montrer que, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique, la suite $(c_n(f))$ tend vers 0 lorsque $|n|$ tend vers l'infini (Lemme de Riemann-Lebesgue).

(f) Montrer que, pour $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f * g) = c_n(f)\, c_n(g)$.

On rappelle le *Théorème de Dirichlet* : soit f une fonction intégrable sur le tore et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux alors, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f, x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

(2) Calculer les coefficients de Fourier de la périodisée de période 2π de la fonction caractéristique de l'intervalle $[a, b]$, avec $|b-a| < 2\pi$. Quelles sommes peut-on en déduire ?

(3) Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique impaire f définie par $f(x) = x(\pi - x)$ si $x \in [0, \pi]$. Quelles sommes de séries numériques peut-on en déduire ?

(4) Montrer que, pour $x \in [-\pi, \pi]$,

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\cos((2p+1)x)}{(2p+1)^2}.$$

En déduire que $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

(5) Définissons f sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = 1$ si $|x| \leq \frac{\pi}{2}$ et 0 sinon. Calculer $g = f * f$ et les coefficients de Fourier de g.

(6) *Théorème de Bernstein.*Soit f une fonction 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\int_{]-\pi,\pi[} f(t)dt = 0$. Montrer que

$$\int_{]-\pi,\pi[} |f(t)|^2 dt \leq \int_{]-\pi,\pi[} |f'(t)|^2 dt.$$

Cas d'égalité ?

(7) *(Équation de la chaleur)* On considère l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}\times]0, \infty[$$

pour les fonctions $f(x, t)$ qui sont 2π-périodiques en x. On note $c_n(t)$ les coefficients de Fourier de la fonction $f(t, .)$.

(a) On suppose que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T}\times]0, \infty[)$. Quelle relation existe-t-il entre les coefficients de Fourier de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(., t)$ et ceux de $f(., t)$?

(b) Montrer que si f est une solution $\mathcal{C}^2(\mathbb{T}\times]0, \infty[)$ de l'équation de la chaleur, alors les $c_n(t)$ satisfont des équations différentielles simples.

(c) Soit g une fonction continue sur le tore. Montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}\times]0, \infty[)$ qui satisfait l'équation de la chaleur et telle que $\lim_{t\to 0} ||f(., t) - g(.)||_{L^2(\mathbb{T})} = 0$.