

SEMAINE 6 - HOMOTHÉTIES ET TRANSLATIONS.

(1) Montrer que toute application du plan affine dans lui-même qui transforme toute droite affine en une droite parallèle est une homothétie ou une translation.

(2) **La droite d'Euler.**

Soit (ABC) un triangle du plan affine euclidien. On désigne par G son centre de gravité, par H son orthocentre et par O le centre du cercle circonscrit.

Démontrer que les points O, G et H sont alignés et que $\vec{GO} = -\frac{1}{2}\vec{GH}$.

(3) Soient A, B et C des points distincts du plan affine, a un réel et l'application f_a qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $M\vec{M}' = a\vec{M}A + a\vec{M}B - \vec{M}C$.

Etudier en fonction du réel a , la nature de l'application f_a .

(4) Soient a, b, c des réels tels que c soit non nul. On se place dans le plan affine muni d'un repère.

(a) Déterminer la nature et les éléments géométriques de l'application φ du plan dans le plan définie analytiquement par $x' = cx + a$ et $y' = cy + b$.

(b) Soit Γ une courbe d'équation $f(x, y) = 0$ où f désigne une application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} . Montrer que l'ensemble Γ' défini par $f(cx + a, cy + b) = 0$ se déduit de Γ par une transformation que l'on précisera.

(5) **Le théorème de MENELAUS.**

Soit un triangle (ABC) et des points P, Q , et R respectivement sur les droites (BC) (privée de B et C), (CA) (privée de C et A) et (AB) (privée de A et B). On se propose de démontrer que si les points P, Q, R sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{PB} \overline{QC} \overline{RA}}{\overline{PC} \overline{QA} \overline{RB}} = 1.$$

On considère les homothéties h_1 de centre P telle que $h_1(C) = B$, h_2 de centre R telle que $h_2(B) = A$ et h_3 de centre Q telle que $h_3(A) = C$.

(a) Montrer que le rapport de l'homothétie h_1 est $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$.

(b) Exprimer de même les rapports des deux autres homothéties.

(c) Conclure en remarquant que C est un point fixe de l'application $h_3 \circ h_2 \circ h_1$.

(6) **Le quadrilatère complet.** Dans le plan affine, on considère un quadrilatère $(ABCD)$ tel que les droites (AB) et (CD) soient sécantes en F et les droites (AD) et (BC) en E . La configuration obtenue s'appelle un quadrilatère complet. Ses diagonales sont les segments $[AC]$, $[BD]$ et $[EF]$.

On veut montrer que les milieux respectifs I, J et K de ces trois diagonales sont alignés. On introduit les points I', J' tels que les quadrilatères $AFCI'$ et $BFDJ'$ soient des parallélogrammes et on considère les homothéties h_1 et h_2 de centre E telles que $h_1(B) = C$ et $h_2(D) = A$.

(a) Déterminer l'image de la droite (BJ') par la transformation $h_2 \circ h_1$.

(b) Déterminer l'image de la droite (DJ') par la transformation $h_1 \circ h_2$.

(c) Démontrer que les points E, I' et J' sont alignés et conclure.