

SEMAINE 2 - NOMBRES COMPLEXES ET ARGUMENTS.

- (1) Déterminer le module, l'argument principal, la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants : $z_1 = ie^{\frac{i\pi}{3}}$, $z_2 = -e^{-\frac{i\pi}{4}}$, $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_4 = z_2^2$
- (2) Soit $z = \rho e^{i\theta}$ et $z_1 = z(z + \bar{z})$. Déterminer en fonction de ρ et θ le module et un argument de z_1 .

- (3) (a) Soient α et β deux réels. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants:

$$z = e^{i\alpha} + e^{i\beta}, \quad w = e^{i\alpha} - e^{i\beta}.$$

- (b) On suppose $\alpha \neq \pi [2\pi]$. Donner une expression simplifiée de $\frac{1 - e^{i\alpha}}{1 + e^{i\alpha}}$.

- (c) On suppose $\alpha \neq \beta + \pi [2\pi]$. Donner une expression simplifiée de $\frac{w}{z}$.

- (4) On considère dans \mathbb{C} les nombres complexes z_1 et z_2 , de module 1 et d'arguments α et β .

- (a) Montrer que $\frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2}$ est un réel positif ou nul. Dans quel cas est-il nul?

- (b) Soient deux points A et B d'un plan complexe d'origine O , et d'affixes respectives a et b (on supposera O , A et B non alignés). Calculer en fonction de a et b l'affixe z du point I barycentre de $((A, |b|), (B, |a|))$

- (c) Montrer que $\frac{z^2}{ab}$ est un réel strictement positif. Exprimer $\arg(z)$ en fonction de $\arg(a)$ et $\arg(b)$.

- (5) Montrer que pour tous z et z' de \mathbb{C} satisfaisant $zz' \neq -1$, $|z| = 1 = |z'|$, le nombre $\frac{z + z'}{1 + zz'}$ est réel.

- (6) Soit $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$, et $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. On définit $\phi_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ par la formule

$$\phi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

Montrer que l'on définit ainsi une bijection de \mathbb{D} sur \mathbb{D} . Quelles sont les images de l'intérieur et de l'extérieur du cercle unité?

- (7) Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants, après avoir indiqué ce que vous entendez par cette expression.

$$z_1 = -3 - 4i$$

$$z_2 = iz_1$$

- (8) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $u = \frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$ a pour module 1. Réciproquement, peut-on représenter ainsi tout nombre complexe de module 1?

- (9) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^5 = \bar{z}$.

- (10) Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$$z + (1 - 3i)(1 - i) + (2 - i)z = 0$$

$$z + 2i\bar{z} + 2(1 + i) - 3 + 2i = 0$$

$$\frac{z^3 - 1}{z - 1} = 0$$

$$z^4 + 1 = 0$$

$$z^2 - 3z + 3 + i = 0.$$