

PROBLÈME 1, À REMETTRE LE 12 SEPTEMBRE 2008.

(3h, rédaction comprise)

Espace vectoriel de fonctions. Étude de fonctions. Famille d'endomorphismes.

On considère les applications f_1, f_2, f_3 de $] - 1, +1[$ dans \mathbb{R} définies par

$$\forall x \in] - 1, +1[, f_1(x) = \frac{1}{1+x}, f_2(x) = \frac{1}{1-x}, f_3(x) = \frac{1}{1+x} \log \frac{1+x}{1-x}.$$

Soit \mathcal{F} l'espace vectoriel engendré par la famille (f_1, f_2, f_3) .

- (1) Après avoir justifié que les fonctions f_1, f_2, f_3 sont bien définies sur $] - 1, +1[$, démontrer que (f_1, f_2, f_3) forme une base de \mathcal{F} .
- (2) Soit f un élément de \mathcal{F} , de coordonnées (a, b, c) dans la base (f_1, f_2, f_3) . On appelle \tilde{f} l'application de $] - 1, +1[$ dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall x \in] - 1, +1[, \tilde{f}(x) = (1 - x^2)f'(x) - xf(x).$$

Calculer $\tilde{f}(x)$ en fonction de $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ et de a, b, c . En déduire que \tilde{f} est élément de \mathcal{F} .

- (3) On désigne par φ l'application de \mathcal{F} dans \mathcal{F} qui, à f , associe \tilde{f} . Justifier que φ est un endomorphisme de \mathcal{F} (application linéaire de \mathcal{F} dans lui-même).
 - (a) Déterminer $\tilde{f}_3 = \varphi(f_3)$ par ses coordonnées dans la base (f_1, f_2, f_3) .
 - (b) Pour tout entier naturel n non nul, on pose $\varphi^{n+1} = \varphi^n \circ \varphi$. Démontrer que les coordonnées de $\varphi^n(f_3)$ dans la base (f_1, f_2, f_3) sont :

$$(2n \cdot (-1)^{n+1}, 0, (-1)^n).$$

- (4) On considère l'ensemble des applications $g_n, n \in \mathbb{N}$ de $] - 1, +1[$ dans \mathbb{R} définies par

$$g_0 = \frac{f_3}{f_1} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, g_n = \frac{\varphi^n(f_3)}{f_1}.$$

- (a) Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in] - 1, +1[, g_n(x) = (-1)^n \left[-2n + \log \frac{1+x}{1-x} \right].$$

- (b) Etudier, suivant la parité de n , les variations de g_n . Préciser $g_n(0)$ et $g'_n(0)$.
- (c) On appelle (C_n) la courbe représentative de g_n dans un plan (P) muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $x'Ox, y'Oy$.
 Démontrer que pour tout entier naturel n , (C_{2n}) est l'image de (C_0) par une translation T_{2n} de (P) dans (P) que l'on précisera et que (C_{2n+1}) est l'image de (C_1) par une translation T_{2n+1} de (P) dans (P) que l'on précisera.
- (d) Tracer dans le plan (P) les courbes (C_0) et (C_1) . En utilisant la question précédente, tracer (C_2) et (C_3) . Montrer que, pour tout entier naturel n , le point d'intersection ω_n de (C_n) avec l'axe $y'Oy$ est un centre de symétrie pour (C_n) . Tracer la tangente à (C_0) en ω_0 et à (C_1) en ω_1 .
- (e) Déterminer les coordonnées x_0, y_0 du point M_0 de (P) commun à (C_0) et (C_1) .