UNIVERSITE D'ORLEANS **CAPES 2008-2009**
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES **S. Grellier**

Semaine 9 - Réflexions du plan.

(1) Connaissant une droite (D), deux points A et B non situés sur (D) et leurs symétriques par rapport à la droite (D), construire
- à la règle et au compas,
- à la règle seule

les images des points quelconques du plan par la reflexion d'axe (D).

(2) Peut-on construire, au compas uniquement, les points de concours d'un cercle donné et d'une droite (AB) donnée par deux points A et B non diamétraux ?

(3) (a) Que peut-on dire de la composée de deux réflexions d'axes parallèles.
(b) Décomposer toute translation en produit de réflexions.
(c) Montrer que la composée d'une réflexion plane et d'une translation est soit une réflexion, soit le produit commutatif d'une réflexion d'axe (D) et d'une translation de vecteur un vecteur directeur de (D).

(4) A quelle(s) condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) le produit de trois réflexions planes est-il une réflexion plane ?
Trois droites étant données dans le plan, existe-t-il un ou des triangles admettant ces trois droites comme médiatrices ?

(5) On identifie le plan affine réel euclidien à $\mathbb{C}$ par le choix d'une base orthogonale $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
Ecrire successivement les transformations complexes de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ représentant
(a) la réflexion d'axe $(O, \vec{i})$,
(b) la réflexion d'axe $(O, \vec{u})$ où $\vec{u} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$,
(c) la réflexion d'axe $(P, \vec{u})$ où $P(x_0, y_0)$ et $\vec{u} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$,
(d) la symétrie glissée d'axe $(P, \vec{u})$ et de vecteur $\lambda\vec{u}$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

(6) On considère le plan affine euclidien orienté, muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Caractériser la transformation définie par

$$\left\{ \begin{array}{rl} x' = & \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 1 \\ y' = & \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2. \end{array} \right.$$

(7) *Plus court chemin entre deux points.* Soit D une droite du plan affine euclidien et P et Q deux points du plan situés d'un même côté de cette droite. Déterminer le point I de la droite D qui minimise la somme $PI + IQ$.

(8) *Le tourniquet dans le cercle.* Soient A_1, A_2, A_3, A_4 quatre points distincts d'un même cercle $\mathcal{C}$ de centre O. La parallèle à A_1A_2 menée par A_4 recoupe $\mathcal{C}$ en un point A_5, la parallèle à A_2A_3 menée par A_5 recoupe $\mathcal{C}$ en un point A_6, la parallèle à A_3A_4 menée par A_6 recoupe $\mathcal{C}$ en un point A_7. Montrer que $A_7 = A_1$.