

SEMAINE 7 - THÉORÈME DE ROLLE.

- (1) (a) Soit  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction continue sur  $[0, \infty[$ , dérivable sur  $]0, \infty[$ . Montrer que si  $\lim_{\infty} f = f(0)$ , alors il existe  $c \in ]0, \infty[$  tel que  $f'(c) = 0$ .
- (b) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable admettant une limite finie ou infinie  $\ell$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ , montrer qu'il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $f'(c) = 0$ .
- (2) Soient  $a$  et  $b$  des réels tels que  $a < b$  et  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable. On suppose que  $f'$  admet une limite  $\ell$  à droite de  $a$ .
- (a) Montrer que  $f$  admet une limite  $m$  à droite de  $a$ .
- (b) Soit  $g$  le prolongement continu de  $f$  à l'intervalle  $[a, b]$  (défini en posant  $g(a) = m$ ). Montrer que  $g$  est dérivable à droite au point  $a$  et que  $g'(a) = \ell$ .
- (3) Soit  $f$  dérivable sur  $[a, b]$  satisfaisant  $f'(a) = 0$  et  $f(a) = f(b)$ . Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

Donner une interprétation graphique de ce résultat.

- (4) Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies, continues et dérivables sur un intervalle  $I$  et  $a$  un élément de  $I$ .
- (a) Montrer que, pour tout  $\alpha \in I$ , il existe  $c \in ]a, \alpha[$  (ou  $]a, \alpha[$ ) tel que
- $$(f(\alpha) - f(a))g'(c) = (g(\alpha) - g(a))f'(c).$$
- (b) En déduire la règle de l'Hospital :
- Si  $\frac{f'}{g'}$  admet une limite  $\ell$  au point  $a$  alors il en est de même de la fonction

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}.$$

- (5) Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois dérivables sur  $[a, b]$ . Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c).$$

- (6) Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable sur  $[a, b]$ , et deux fois dérivables sur  $]a, b[$ .

- (a) On suppose  $f(a) = f(b)$ . Montrer que, pour  $x \in ]a, b[$ , il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(c).$$

- (b) Montrer que pour  $x \in ]a, b[$ , il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f(x) = (x-a)\frac{f(b) - f(a)}{b-a} + f(a) + \frac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(c).$$