UNIVERSITÉ D'ORLÉANS **CAPES 2008-2009**
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES **S. Grellier**

Semaine 12 - Séries numériques II.

1. **Comparaison série et intégrale.** Soit f une fonction continue décroissante, positive définie sur l'intervalle $[n_0, +\infty[$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comparer $f(n)$, $f(n+1)$ et $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)dt$.
   (b) Montrer que la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_{n_0}^{\infty} f(t)dt$ sont de même nature.
   (c) Donner la nature des séries de Bertrand $\sum \frac{\ln(n)^\beta}{n^\alpha}$.
2. (a) Que peut-on dire sur la nature de la série de terme général u_n qui satisfait la propriété suivante : il existe $l \in]0, 1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| \leq l$? Même question s'il existe $L > 1$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| \geq L$.
   (b) Enoncer et démontrer le critère de convergence de d'Alembert.
   (c) Etudier la nature des séries de terme général $u_n = \dfrac{2^n n!}{n^n}$, $v_n = \dfrac{e^n n!}{n^n}$, $w_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$.
3. Soit (a_n) une suite décroissante de **réels** positifs tendant vers 0. On considère la série de terme général $u_n = (-1)^n a_n$.
   (a) Montrer que les sommes partielles (S_{2n}) et(S_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire la convergence de la série de terme général (u_n).
   (b) Montrer que $|R_n| \leq a_{n+1} = |u_{n+1}|$.
4. **Transformation d'Abel.** Soient (a_n), (b_n) deux suites de nombres complexes. On pose, pour $n \geq 1$, $A_n = \sum_{j=1}^n a_j$.
   (a) Vérifier que $\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n$.
   (b) Montrer que si, la suite (A_n) est bornée et si la suite (b_n) tend vers 0 en décroissant ou plus généralement en étant à variation bornée ($\sum_{n=2}^{\infty} |b_n - b_{n-1}| < \infty$), alors la série $\sum a_n b_n$ est convergente. De plus $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(b_n - b_{n+1})$.
   Sous ces conditions, montrer que le reste de la série de terme général $a_n b_n$ satisfait $|R_n| \leq 2A \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}|$ où A est un majorant de la suite $|A_n|$ (en particulier, lorsque (b_n) tend vers 0 en décroissant, on a $|R_n| \leq 2A|b_{n+1}|$).

(c) Retrouver les résultats concernant les séries alternées.

5. Etudier la nature de la série de terme général $\dfrac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$. Montrer que, lorsque $\theta \neq 2k\pi$, $|R_n(\theta)| = \left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k^\alpha}\right| \leq \dfrac{2}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|} \times \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}$.

6. Etudier la nature (convergence absolue, convergence simple) des séries de terme général
$u_n = \dfrac{x^n}{n^\alpha}$, $x \in \mathbb{R}$; $u_n = \dfrac{\sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$; $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n - \log n}$;
$u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha \log n}$; $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha + (-1)^n n^{3\alpha}}$; $u_n = \log\left(1 + (-1)^n \dfrac{\log n}{n}\right)$;
$u_n = \dfrac{(-1)^n \sin n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

7. Pour tout $\alpha > 0$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$.
   (a) Après avoir justifier l'existence de R_n, montrer que $|R_n| = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+n)^\alpha}$.
   (b) Montrer, que pour tout $x > 0$ et tout $0 < h < x$,
   $$\frac{1}{(x-h)^\alpha} + \frac{1}{(x+h)^\alpha} - \frac{2}{x^\alpha} > 0.$$
   (c) En déduire la nature de la série de terme général R_n.

8. *Critère de Gauss*
   (a) Quelle est la nature de la série de terme général $t_n = \frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n}$?
   (b) Soit u_n le terme général d'une série réelle, $u_n > 0$ pour tout n. On suppose qu'il existe $\lambda \in R$ et une suite r_n tel que pour tout $n \neq 0$
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + r_n \text{ et } \sum |r_n| < \infty.$$
      i. Montrer que la série de terme général $\rho_n = \log \frac{u_{n+1}}{u_n} + \frac{\lambda}{n}$ est convergente.
      ii. Exprimer $\log u_{n+1} - \log u_n$ à l'aide de t_n et ρ_n. En déduire qu'il existe une suite σ_n convergente telle que pour tout $n \neq 0$ $\log u_n = -\lambda \log n + \sigma_n$.
      iii. Pour quelles valeurs de λ la série $\sum u_n$ est-elle convergente (critère de Gauss) ?