UNIVERSITE D'ORLEANS **CAPES 2008-2009**
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES **S. Grellier**

Semaine 1 - Suites divergentes.

(1) Déterminer les valeurs du nombre réel α pour lesquelles la suite de terme général $\sin(n\alpha)$ est convergente.

(2) Démontrer que toute suite périodique non constante est une suite divergente.

(3) Soit (u_n) une suite réelle qui tend vers $+\infty$. Démontrer que l'ensemble $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ admet un plus petit élément.

(4) **Constante d'Euler** On considère les suites définies par $u_n \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$, $v_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ et $x_n = \log(n)$.

(a) Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $u_n \leq x_n \leq v_n$ et donner une interprétation graphique.

(b) Etudier la convergence des suites (u_n), (v_n) et (x_n).

(c) Démontrer que les suites $(v_n - x_n)$ et $(1 + u_n - x_n)$ sont adjacentes.
La limite commune de ces deux suites se note γ et est appelée la constante d'Euler.

(d) Donner un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée de γ à 10^{-3} près. Préciser la valeur obtenue sur votre calculatrice programmable.

(5) Soit (u_n) une suite à termes réels strictement positifs. Démontrer que si la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ admet pour limite $+\infty$, alors il en est de même de la suite $((u_n)^{1/n})_{n\geq 1}$.

(6) Soit (u_n) une suite à termes réels strictement positifs.
On suppose que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ admet pour limite un nombre réel a. Etudier la convergence de la suite (u_n) dans chacun des cas $0 < a < 1$ et $a > 1$. Dans le cas $a = 1$, montrer que l'on ne peut pas conclure.

(7) Démontrer que la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$ admet pour limite $+\infty$.

(8) Soit (u_n) une suite réelle bornée qui diverge. Démontrer que l'on peut trouver deux sous-suites extraites de (u_n) qui convergent vers des limites distinctes.

(9) Soit (u_n) une suite réelle. Démontrer que la suite (u_n) est non majorée si et seulement si elle possède une suite extraite qui tend vers $+\infty$.