

Semaine 21 - Exercices suites et séries de fonctions, séries de Fourier.

- (1) Soit $(\lambda_n)_n$ une suite croissante de réels strictement positifs telle que $\lim \lambda_n = +\infty$. On considère la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ avec $u_n(x) = (-1)^n e^{-\lambda_n x}$.
- Étudier la convergence simple de cette série.
 - Pour tout $x > 0$, on note $S(x)$ sa somme. Montrer que $0 \leq S(x) \leq e^{-\lambda_0 x}$.
 - Soit $R_n(x) = \sum_{k \geq n+1} u_k(x)$ le reste d'ordre n de cette série. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $|R_n(x)| \leq e^{-\lambda_{n+1} x}$. Quel est le signe de $R_n(x)$?
 - En déduire que pour tout $a > 0$ la série $\sum u_n$ est uniformément convergente sur $[a, +\infty[$ et que S est continue sur $]0, \infty[$.
- (2) (Équation de la chaleur) On considère l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times]0, \infty[$$

pour les fonctions $f(x, t)$ qui sont 2π -périodiques en x . On note $c_n(t)$ les coefficients de Fourier de la fonction $f(t, \cdot)$.

- On suppose que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T} \times]0, \infty[)$. Quelle relation existe-t-il entre les coefficients de Fourier de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cdot, t)$ et ceux de $f(\cdot, t)$?
 - Montrer que si f est une solution $\mathcal{C}^2(\mathbb{T} \times]0, \infty[)$ de l'équation de la chaleur, alors les $c_n(t)$ satisfont des équations différentielles simples.
 - Soit g une fonction continue sur le tore. Montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T} \times]0, \infty[)$ qui satisfait l'équation de la chaleur et telle que $\lim_{t \rightarrow 0} \|f(\cdot, t) - g(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{T})} = 0$.
- (3) *Extrait Capes 91.* Pour toutes fonctions f, g appartenant à $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$, on définit la fonction $f * g$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ par

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt.$$

- Montrer que la loi $*$ est une loi de composition interne sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$. On admet que la loi $*$ ainsi définie est commutative et associative. On suppose, dans les questions qui suivent, que f et g sont deux fonctions appartenant $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ à valeurs positives ou nulles dont les intégrales impropres sur \mathbb{R}_+ sont convergentes.
- Montrer que pour tout réel R strictement positif, on a :

$$\int_0^R f * g(x)dx = \int_0^R g(t) \int_0^{R-t} f(x)dxdt.$$

- Montrer que pour tout réel R strictement positif, on a :

$$\int_0^{R/2} f(x)dx \int_0^{R/2} g(t)dt \leq \int_0^R f * g(x)dx \leq \int_0^R f(x)dx \int_0^R g(t)dt.$$

- Déduire de ce qui précède que l'intégrale impropre de $f * g$ sur \mathbb{R}_+ est convergente et que

$$\int_0^\infty f * g(x)dx = \int_0^\infty f(x)dx \int_0^\infty g(t)dt.$$

- Pour tout réel λ strictement positif, on désigne par f_λ la fonction définie par : $\forall t \in \mathbb{R}_+; f_\lambda(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. On définit la suite $(f_\lambda^{*n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ des puissances de convolution de la fonction f_λ par $f_\lambda^{*1} = f_\lambda$ et pour tout entier non nul $f_\lambda^{*(n+1)} = f_\lambda^{*n} * f_\lambda$.
 - Calculer f_λ^{*2} .
 - Calculer f_λ^{*n} pour tout entier naturel non nul n .
- (4) *Extrait Capes 2007.* Pour tout entier $n \geq 1$, on note D_n le noyau de Dirichlet, défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx).$$

- Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x \neq 0[2\pi]$, on a :

$$D_n(x) = \frac{1}{2} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

(b) Pour tout entier $n \geq 1$, on note L_n l'intégrale :

$$L_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x D_n(x) dx.$$

(i) Calculer l'intégrale $\int_0^\pi x \cos(kx) dx$ pour tout entier $k \geq 1$.

(ii) En déduire que

$$L_n = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{k^2}.$$

(c) On note f le prolongement par continuité en 0 de la fonction définie sur $]0, \pi[$ par

$$x \mapsto \frac{x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Démontrer que la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $[0, \pi]$.

(d) Soit $\phi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$. Démontrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^\pi \phi(x) \sin(\lambda x) dx = 0.$$

(e) Démontrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = 0$.

(5) *Extrait Capes 93.* Soit f une fonction à valeurs réelles, continue et bornée sur $[0, \infty[$, et telle que, pour tout réel strictement positif x , l'intégrale $\int_0^\infty \frac{tf(t)}{x^2+t^2} dt$ soit convergente. On pose pour tout entier $n \geq 0$, $x > 0$

$$u_n(x) = \int_n^{n+1} \frac{tf(t)}{t^2+x^2} dt \text{ et } (Sf)(x) = \int_0^\infty \frac{tf(t)}{t^2+x^2} dt.$$

(a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=0}^\infty u_n(x)$ converge simplement vers $(Sf)(x)$ et que $u_n(x)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, \infty[$.

(b) Déterminer α et β complexes tels que $\frac{t}{t^2+x^2} = \frac{\alpha}{x-it} + \frac{\beta}{x+it}$, en déduire que $|\frac{\partial^k}{\partial x^k}(\frac{t}{t^2+x^2})| \leq \frac{k!}{(x^2+t^2)^{(k+1)/2}}$ pour tout $k \geq 1$ et tout $(x, t) \neq (0, 0)$. Soit $a > 0$, montrer qu'il existe $A_k > 0$ tel que pour tout $x \geq a$, et pour tout entier $n \geq 0$, on ait $|\frac{d^k}{dx^k}(u_n(x))| \leq A_k \int_n^{n+1} \frac{dt}{(a^2+t^2)^{(k+1)/2}}$, en déduire que la série de fonctions $\sum_{n=0}^\infty u_n^{(k)}(x)$ converge normalement sur $[a, \infty[$.

(c) Démontrer que la fonction Sf est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, \infty[$ et que pour tout $k > 0$ on a : $\frac{d^k}{dx^k}(Sf)(x) = \int_0^\infty \frac{\partial^k}{\partial x^k}(\frac{t}{x^2+t^2})f(t)dt$.