UNIVERSITE D'ORLEANS **CAPES 2008-2009**
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES **S. Grellier**

Semaine 8 - Théorème de Rolle et des accroissements finis.

(1) Soient a et b des réels tels que $a < b$ et $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que f' admet une limite ℓ à droite de a.

(a) Montrer que f admet une limite m à droite de a.

(b) Soit g le prolongement continu de f à l'intervalle $[a, b]$ (défini en posant $g(a) = m$). Montrer que g est dérivable à droite au point a et que $g'(a) = \ell$.

(c) Démontrer que la fonction $x \mapsto \arcsin(1 - x^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

(2) Soit f dérivable sur $[a, b]$ satisfaisant $f'(a) = 0$ et $f(a) = f(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

Donner une interprétation graphique de ce résultat.

(3) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} = f(\frac{a + b}{2}) + \frac{(b - a)^2}{8} f''(c).$$

(4) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[a, b]$, et deux fois dérivables sur $]a, b[$.

(a) On suppose $f(a) = f(b)$. Montrer que, pour $x \in]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(x) = \frac{1}{2}(x - a)(x - b) f''(c).$$

(b) Montrer que pour $x \in]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(x) = (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} + f(a) + \frac{1}{2}(x - a)(x - b) f''(c).$$

(5) Démontrer que, pour tout $t \in]0, 1]$,

$$\frac{t}{1 + t} < \ln(1 + t) < t.$$

En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}.$$

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tous réels $0 < a < b$:

$$(n + 1)a^n < \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} < (n + 1)b^n.$$

Démontrer que les suites $(1 + \frac{1}{n})^n$ et $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$sont adjacentes et préciser leur limite.