

Exercices d'arithmétique (suite)

Exercice 1 1) On considère un nombre premier p .

Etablir que p divise $\binom{p}{k}$ pour $1 \leq k < p$, puis qu'il divise $(a+1)^p - a^p - 1$ ($a \in \mathbb{Z}$).

2) Petit théorème de Fermat

En raisonnant par récurrence sur l'entier naturel n , montrer que, si p est premier, alors p divise $n^p - n$.

Exercice 2 Déterminer le reste de la division de 2^{1997} par 3, par 23 et par 69.

Exercice 3 Montrer qu'un entier $n \geq 2$ n'est pas premier si et seulement s'il a un diviseur premier d tel que $2 \leq d \leq \sqrt{n}$.

Exercice 4 On considère une fonction polynôme de degré n à coefficients entiers :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

On suppose que p/q est une racine rationnelle de P écrite sous forme irréductible. Montrer que p divise a_0 et que q divise a_n .

Application : Quelles sont les racines rationnelles de $P(x) = 6x^4 - 11x^3 - x^2 - 4$?

Exercice 5 Léonhard Euler a affirmé en 1772 que si $n = 0, 1, \dots, 39$, les nombres $f(n) = n^2 + n + 41$ étaient premiers.

1) Vérifier ce résultat pour $n < 10$.

2) Montrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels n tels que 43 divise $f(n)$.

3) Montrer que, quel que soit l'entier $n > 2$, le nombre $n^2 + 2n - 3$ n'est jamais premier.

4) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le nombre $n^4 + 4$ est-il premier ?

Exercice 6 Soit la suite de Fibonacci (F_n) définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ puis $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1) Montrer que F_{n+1} et F_n sont premiers entre eux.

2) Montrer que, pour $n \geq 3$, F_n admet un diviseur premier.

3) En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Exercice 7 Résoudre dans \mathbb{Z} le système suivant :

$$\begin{cases} x \equiv 1[3] \\ x \equiv 0[35] \end{cases}$$

Exercice 8 1) Montrer que $\overline{33}$ admet un inverse dans $\mathbb{Z}/104\mathbb{Z}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}/104\mathbb{Z}$ le système suivant :

$$\begin{cases} \overline{35x} + \overline{2y} = \overline{43} \\ \overline{17x} + \overline{3y} = \overline{10}. \end{cases}$$