Espaces vectoriels.

1 - Soit X un ensemble quelconque, montrer que l'ensemble $\mathbb{C}^X$ des applications de X dans $\mathbb{C}$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

2 - Le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ formé des fonctions bornées constitue-t'il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

3 - Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels?
a) le sous-ensemble des fonctions majorées,
b) le sous-ensemble des fonctions ne prenant qu'un nombre fini de valeurs,
c) le sous-ensemble des fonctions à valeurs positives,
d) le sous-ensemble des fonctions continues,
e) le sous-ensemble des fonctions nulles en un point a fixé,
f) le sous-ensemble des fonctions nulles en un point,
g) le sous-ensemble des fonctions discontinues en un point a fixé,
h) le sous-ensemble des fonctions paires,
i) le sous-ensemble des fonctions monotones,
j) le sous-ensemble des fonctions polynômiales de degré n,
k) le sous-ensemble des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à n.

4 - Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ les familles suivantes sont-elles libres?
a) $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ où $f_a(x) = 0$ si $x \neq a$, et $f_a(a) = 1$,
b) $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ où $f_a(x) = |x - a|$,
c) $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ où $f_a(x) = e^{ax}$,
d) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $f_n(x) = \sin nx$,
e) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $f_n(x) = (\sin x)^n$.

5 - Dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ la famille $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{C}}$ où $f_\lambda(x) = e^{\lambda x}$, est-elle libre?

6 - Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et u, v, w des éléments de E. Montrer que les systèmes (u, v, w) et $(u + v, v + w, w + u)$ engendrent le même sous-espace vectoriel de E.

7 - Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

8 - Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments d'un espace vectoriel E. On suppose qu'il existe une famille $(\varphi_i)_{i\in I}$ de formes linéaires sur E telle que $\varphi_i(e_j) = 0$ si $i \neq j$ et $\varphi_i(e_j) = 1$ si $i = j$. Montrer que famille $(e_i)_{i\in I}$ est libre. Que peut-on dire de la famille $(\varphi_i)_{i\in I}$?

Application (polynômes de Lagrange). Soit $E = \mathbb{C}[X]$, $a_1, \ldots, a_n$ des nombres complexes deux à deux distincts. Pour $1 \leq k \leq n$, on pose

$$P_k(X) = \prod_{\substack{1\leq j\leq n \\ j\neq k}} \left(\frac{X - a_j}{a_k - a_j} \right) .$$

Montrer que les polynômes $(P_k)_{1\leq k\leq n}$ sont indépendants (calculer $P_k(a_j)$).

9 - Etudier l'indépendance linéaire de $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ dans $\mathbb{R}$ muni de sa structure de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

10 - a) Montrer qu'une famille de polynômes de $\mathbb{C}[X]$, de degrés (ou de valuations) deux à deux distincts, est libre.
b) Montrer que la famille de polynômes $(1, (X-1), \ldots, (X-1)^n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ (espace des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n). Même question pour la famille de polynômes $(X^k(X-1)^{n-k})_{0\leq k\leq n}$.

11 - Etudier l'indépendance de la famille de fonctions (f_1, f_2, f_3) de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ où $f_k(x) = \sin(x + k)$ pour $k = 1, 2, 3$.

12 - Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on considère des vecteurs $(u_1, \ldots, u_n)$ et $(v_1, \ldots, v_{n-1})$. On suppose que chaque u_i, $1 \leq i \leq n$ est combinaison linéaire des $(v_1, \ldots, v_{n-1})$, montrer que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est liée (faire un raisonnement par récurrence).

13 - Montrer que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est somme directe des sous-espaces vectoriels I et P constitués respectivement des applications impaires et paires.

14 - Montrer que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles convergentes est somme directe du sous-espace vectoriel des suites convergeant vers 0 et du sous-espace vectoriel des suites constantes.

15 - Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que la condition $F\cap G = F\cap H = G\cap H = \{0\}$ ne suffit pas pour affirmer que la somme $F+G+H$ est directe.

16 - Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $E_1, \ldots, E_n$ et $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que
  (i) $\bigoplus_{i=1}^n E_i = \bigoplus_{i=1}^n F_i$
  (ii) pour tout i, $1 \leq i \leq n$, $E_i \subset F_i$.

Montrer que pour tout i, $E_i = F_i$.

17 - Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que

$$\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G\,.$$