Polynômes.

1 - Soient $n, p \in \mathbb{N}$, et P le polynôme $P = X^n(X-1)^p$. Déterminer $P^{(k)}(1)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

2 - Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(x) \in \mathbb{R}$ pour tout réel x. Montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$.

3 - Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ le polynôme $(X+1)^n - X^n - 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

4 - Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, on suppose que le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ de P par $(X-1)$ (resp. $(X-2)$) est 1 (resp. 2). Déterminer le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ de P par $(X-1)(X-2)$.

5 - Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le reste de la division euclidienne de $(X \sin\theta + \cos\theta)^n$ par $X^2 + 1$.

6 - Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ divisibles par leur polynôme dérivé P'.

7 - Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ (avec $n \geq 1$).
1) Montrer que si P admet une racine rationnelle $\alpha = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux alors p divise a_0 et q divise a_n.
2) Montrer que le polynôme $6X^4 - 11X^3 - X^2 - 4$ admet des racines rationnelles et les déterminer. En déduire sa décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

8 - Soit $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}^*$, $n = pq + r$ avec $0 \leq r < p$ (division euclidienne de n par p), et soit $a \in \mathbb{C}$.
a) Montrer que le reste de la division euclidienne de X^n par $X^p - a$ est $a^q X^r$.
b) Montrer que le reste de la division euclidienne de $X^n - a^n$ par $X^p - a^p$ est $a^{pq}(X^r - a^r)$.
c) Soit $d = n \wedge p$ le pgcd de n et p. Montrer que le pgcd des polynômes $X^n - a^n$ et $X^p - a^p$ est $X^d - a^d$.

9 - Soit I une partie de $\mathbb{N}$, et $(P_i)_{i \in I}$ une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$. On suppose que l'application $I \to \mathbb{N}, i \mapsto \deg(P_i)$ est injective. Montrer que $(P_i)_{i \in I}$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$. Même question en remplaçant le degré par la valuation.

10 - *Polynômes de Lagrange.* Soient $a_0, \dots, a_n$ des nombres complexes deux à deux distincts. Pour $0 \le k \le n$, on pose

$$P_k(X) = \prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \ne k}} \left(\frac{X - a_j}{a_k - a_j} \right).$$

a) Montrer que les polynômes $(P_k)_{0 \le k \le n}$ sont indépendants (calculer $P_k(a_j)$).
b) Montrer que pour tout $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $P(a_j) = \alpha_k$ pour tout j, $0 \le j \le n$.

11 - *Polynômes de Tchebychev.*
a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$, de degré n tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

b) Déterminer T_1, T_2, T_3.
c) Montrer que le coefficient de plus haut degré de T_n est 2^{n-1}.
d) Montrer que les racines de T_n sont les réels $x_i = \cos \frac{2i+1}{2n}\pi$, $(0 \le i \le n-1)$.

12 - a) Déterminer les racines du polynôme $P_n = (X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}$.
b) Calculer $\prod_{0 \le k \le n}(1 + \mathrm{cotan}^2(\frac{k\pi}{2n+1}))$.

13 - Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, pour $Q \in \mathbb{C}[X]$ on définit le polynôme $P \circ Q$ par : $P \circ Q = \sum_{k=0}^n a_k Q^k$.
1) Montrer que $P - X$ divise $P \circ P - P$.
2) Résoudre l'équation $(z^2 - 3z + 1)^2 - 3z^2 + 8z - 2 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

14 - 1) Pour $P = \sum_{k=0}^n a_k\, X^k \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\overline{P} = \sum_{k=0}^n \overline{a_k}\, X^k$.
a) Montrer que pour tous P, $Q \in \mathbb{C}[X]$,

$$\overline{P+Q} = \overline{P} + \overline{Q}\,,\ \overline{P\,Q} = \overline{P}\,\overline{Q}$$

L'application $P \mapsto \overline{P}$, $\mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$ est-elle linéaire?
b) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ il existe un unique couple (U, V) de polynômes à coefficients réels tel que $P = U + iV$. Montrer que $P\,\overline{P} = U^2 + V^2$.
2) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \ge 0$.
a) Montrer que les racines de P sont d'ordre pair.
b) Si P n'a pas de racines réelles, montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = Q\,\overline{Q}$.
c) Montrer qu'il existe des polynômes A et B à coefficients réels tels que $P = A^2 + B^2$.