

Division euclidienne

Exercice 1 On considère un entier $b > 0$ et quatre entiers n, n', m, m' tels que :

- a) n et n' ont même reste dans la division par b ,
 - b) m et m' ont même reste dans la division par b .
- 1) Montrer que mn et $m'n'$ ont également même reste dans la division par b .
 - 2) En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, que n^p et n'^p ont même reste dans la division par b .
 - 3) Application : Déterminer le reste de la division de 7^n par 5.

Exercice 2 *Théorème chinois*

Soient des entiers p et q premiers entre eux et a et b tels que $0 \leq a < p$ et $0 \leq b < q$.

Montrer qu'il existe des entiers n dont le reste de la division par p est a et le reste de la division par q est b puis déterminer ces entiers n en fonction de l'un d'eux.

Exercice 3 17 pirates s'emparent d'un navire. S'il se partagent le butin, il reste 3 pièces d'or pour le cuisinier chinois. Les pirates se querellent et 6 d'entre eux sont tués. S'ils se partagent le butin, il reste 4 pièces d'or pour le cuisinier chinois. Le navire fait naufrage, et seuls 6 pirates survivent. Le partage laisserait alors 5 pièces d'or au cuisinier. Combien celui-ci aura-t-il alors au minimum lorsqu'il empoisonnera les pirates survivants ?

Exercice 4 Soit G un sous-groupe de \mathbb{Z} , montrer qu'il existe un unique entier naturel n tel que $G = n\mathbb{Z}$.

Exercice 5 1) Ecrire le nombre 80267 en base 12.

- 2) Donner un algorithme permettant d'effectuer cette transformation.
- 3) Vérifier sur la calculatrice, à l'aide de l'algorithme précédent, le résultat du 1).