

1 Résultats correspondant à la leçon 68

Exercice 1

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^* .

1. Montrer que f a un développement limité d'ordre 0 en 0 ssi f a un prolongement sur \mathbb{R} continue en 0.
2. Montrer que f a un développement limité d'ordre 1 en 0 ssi f a un prolongement sur \mathbb{R} dérivable en 0.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$.

1. Montrer que f a un prolongement de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , que l'on notera g .
2. Montrer que f a un développement limité d'ordre 2 en 0.
3. Montrer que g n'est pas deux fois dérivable en 0.
4. (Remarquer que g a un DL d'ordre 2 en 0, mais g' n'a pas de DL d'ordre 1 en 0)

Exercice 3

Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant 0, et f une fonction définie et dérivable sur I telle qu'au voisinage de 0

$$f'(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$$

Montrer que f admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre $n + 1$ suivant

$$f(x) = f(0) + a_0x + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1})$$

(Remarquer que si g est une fonction deux fois dérivable en 0, alors g admet un DL d'ordre 2 en 0. Mais la réciproque est fautive d'après l'exercice 2.)

Exercice 4 (Taylor-Young)

1. Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant 0, et f une fonction de classe \mathcal{C}^n sur I .
Montrer que f admet en 0 le DL à l'ordre n suivant

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

(Indication: Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral)

2. Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant 0, et f une fonction définie sur I , $n - 1$ fois dérivable sur I et n fois dérivable en 0 ($n \geq 1$).
Montrer que le résultat précédent est encore valable.
(Indication: faire une démonstration par récurrence sur n et utiliser les résultats de l'exercice 1 question 2 et de l'exercice 3)

2 Exercices

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^{x^2}$. Montrer que f est bijective de \mathbb{R} sur \mathbb{R} et déterminer le DL à l'ordre 5 en 0 de f^{-1} .

Exercice 6

Soit f une fonction dérivable sur un voisinage V de 0 vérifiant $f(0) = \frac{\pi}{4}$ et :

$$\forall x \in V \quad x + f(x) \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad \text{et} \quad f'(x) = \tan(x + f(x))$$

Déterminer le DL d'ordre 4 en 0 de f .

Exercice 7

Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $\ln(3e^x + e^{-x})$

Exercice 8

Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 2π de $\sin(\sqrt{x^2 - 3\pi^2})$

Exercice 9

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \{ [(1+x^2)^{\frac{1}{x}} - 1](1+x)^{\frac{1}{x^2}} \}$

3 Indications et Réponses des exercices

Réponse exercice 5:

La méthode pour calculer un DL de f^{-1} a été vue en cours.

$f^{-1}(x) = x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + o(x^5)$ au voisinage de 0

Réponse exercice 6:

On montre d'abord que f est 4 fois dérivable sur V , puis on calcule $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$ et $f^{(4)}(0)$, puis on applique la formule de Taylor-Young.

Comme $f(0) = \frac{\pi}{4}$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 4$, $f^{(3)}(0) = 24$ et $f^{(4)}(0) = 272$, la formule de Taylor-Young donne:

$f(x) = \frac{\pi}{4} + x + 2x^2 + 4x^3 + \frac{34}{3}x^4 + o(x^4)$ au voisinage de 0

Réponse exercice 7:

C'est un exercice classique de calcul d'un DL en 0.

$\ln(3e^x + e^{-x}) = \ln(4) + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)$ au voisinage de 0

Réponse exercice 8:

Pour calculer un DL en 2π , on commence par faire le changement de variable $t = x - 2\pi$ pour se ramener à calculer un DL en 0.

$\sin \sqrt{x^2 - 3\pi^2} = -2(x-2\pi) + \frac{3}{2\pi}(x-2\pi)^2 + \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{\pi^2}\right)(x-2\pi)^3 + o((x-2\pi)^3)$ au voisinage de 2π

Réponse exercice 9:

Grâce aux DL de la fonction exponentielle et de la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ au voisinage de 0, on obtient que:

$(1+x^2)^{\frac{1}{x}} - 1 \underset{0}{\sim} x$ et $(1+x)^{\frac{1}{x^2}} \underset{0}{\sim} e^{-1/2}e^{1/x}$

donc $[(1+x^2)^{\frac{1}{x}} - 1](1+x)^{\frac{1}{x^2}} \underset{0^+}{\sim} e^{-1/2} \frac{e^{1/x}}{1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ d'après les croissances comparées.