

## Feuille d'exercices sur la dérivation

### 1 Résultats correspondant aux leçons 61 et 62

#### Exercice 1 (un résultat figurant dans la leçon 61)

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $x_0 \in I$ .

On dit que  $\theta$  est une approximation affine de  $f$  au voisinage de  $x_0$  s'il existe  $b \in \mathbb{R}$  tel que  $\theta(x) = f(x_0) + b(x - x_0)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

On dit que  $\tilde{\theta}$  est une meilleure approximation affine de  $f$  au voisinage de  $x_0$  si  $\tilde{\theta}$  est une approximation affine de  $f$  au voisinage de  $x_0$  et si pour toute autre approximation affine  $\theta$  on a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \tilde{\theta}(x)}{f(x) - \theta(x)} = 0$$

1. Démontrer que: si une meilleure approximation affine existe, alors elle est unique.
2. Démontrer que:  $f$  admet une meilleure approximation affine au voisinage de  $x_0$  si et seulement si  $f$  est dérivable en  $x_0$ . De plus, dans ce cas, la meilleure approximation affine de  $f$  au voisinage de  $x_0$  est:  $\tilde{\theta}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .

#### Exercice 2 (util. de la déf. de la dérivabilité et du nb dérivé à l'aide du taux d'accroissement, Cf leçon 61)

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $c \in I$ .

Supposons que  $f$  admet un extremum local en  $c$  et que  $f$  est dérivable en  $c$ .

Montrer que  $f'(c) = 0$ .

#### Exercice 3 (2 applications de la dérivée d'une fonction composée, Cf leçon 62)

1. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction périodique et dérivable. Montrer que  $f'$  est périodique. Réciproquement, si une fonction  $f$  est dérivable de dérivée périodique, peut-on conclure que  $f$  est périodique ?
2. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable paire (respectivement impaire). Montrer que  $f'$  est impaire (respectivement paire). Réciproquement, si une fonction  $f$  est dérivable de dérivée paire (respectivement impaire), peut-on conclure que  $f$  est impaire (respectivement paire) ?

#### Exercice 4 (Leibniz, Cf leçon 62)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $f$  et  $g$  deux fonctions  $n$  fois dérivables sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $fg$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$$

### 2 Exercices sur la dérivabilité et sur le calcul de dérivées

#### Exercice 5

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ x & \rightarrow 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. Montrer que

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ x & \rightarrow 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Est-elle de classe  $\mathcal{C}^1$  ?

3. Que peut-on dire de

$$f_k : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow x^k \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ x & \rightarrow 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

pour  $k$  entier,  $k \geq 3$  ?

### Exercice 6

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 0$  si  $x \leq 0$ , et  $f(x) = e^{-1/x}$  si  $x > 0$ .

1. Montrer par récurrence sur  $n$  que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et

$$\exists P_n \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } \forall x > 0 \quad f^{(n)}(x) = e^{-1/x} P_n \left( \frac{1}{x} \right)$$

2. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f$  est  $n$  fois dérivable en 0 et  $f^{(n)}(0) = 0$ .

3. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

## 3 Un exercice pour aller plus loin et réviser notamment la dérivation d'une bijection réciproque

### Exercice 7

1. Montrer que la restriction de la fonction tangente à l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  admet une fonction réciproque notée  $\arctan$ .

2. Montrer que la fonction  $\arctan$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et déterminer sa dérivée notée  $(\arctan)'$ .

3. Montrer, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^{+*}$ , l'égalité:  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ .

4. Etablir pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^+$ , l'encadrement :  $0 \leq \arctan x \leq x$ .

5. Montrer que  $\arctan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ .